

Pula zadań na kolokwium

25 marca 2017

Trzy spośród czterech zadań, które będzie trzeba rozwiązać podczas kolokwium zostaną wybrane z poniższej puli. Zadania na kolokwium mogą się różnić od poniższych o stałe (tzn. wyrażenia w poniższych opisach zbiorów mogą zostać zastąpione podobnymi wyrażeniami, do których dodano jakąś liczbę, lub które pomnożono przez jakąś liczbę). Każdą odpowiedź należy uzasadnić.

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C,$$

gdzie $X \Delta Y$ oznacza zbiór $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Zadanie 4. Sprawdź czy dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzą

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
2. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$.

$\mathcal{P}(X)$ oznacza zbiór potęgowy X , tzn. zbiór podzbiorów X .

Zadanie 5. Niech $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 6. Niech $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 7. Niech $A_n = (-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 8. Niech $A_n = (-\frac{1}{n}, n)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 9. Niech $A_n = (-n, \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 10. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 11. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 12. Niech $A_n = (\frac{4}{n+1}, 1 + \frac{4}{n+1})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 13. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - n| \leq 1\}$$

Zadanie 14. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 2(n+1) \text{ jest dzielnikiem } x\}$$

Zadanie 15. Znajdź $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_x$ i $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x$ jeśli

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| = 3\}$$

Zadanie 16. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [1 - 2^{-n}, 2^n]\}$$

Zadanie 17. Znajdź $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ i $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ jeśli

$$A_q = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - q| < \frac{1}{3}\}.$$

Zadanie 18. Niech $A_{m,n} = (m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n})$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 19. Niech $A_{t,q} = (q - t, q + t)$ dla $q \in \mathbb{Q}$ i $t \in \mathbb{R}_+$. Znajdź $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_{t,q}$.

Zadanie 20. Niech $A_{t,q} = (q - t, q + t)$ dla $q \in \mathbb{Q}$ i $t \in \mathbb{R}_+$. Znajdź $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{t,q}$.

Zadanie 21. Niech $A_{m,n} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 22. Niech $A_{m,n} = (-\frac{1}{n}, m]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 23. Niech $A_{m,n} = [-\frac{m}{n}, \frac{n}{m}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 24. Niech $A_{q,n} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - q| < \frac{1}{n+1}\}$. Znajdź

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,n}$$

Zadanie 25. Niech $A_n = [0, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 26. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 27. Niech $A_n = [-\frac{1}{n}, n]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 28. Niech $A_n = (\frac{4}{n+1}, 1 + \frac{4}{n+1})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 29. Niech $A_t = (\cos t - 2, \cos t + 2)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \bigcap_{t \geq s} A_t$.

Zadanie 30. Niech $A_t = (\sin t - 1, \sin t + 1)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq s} A_t$.