

Rozwiązania przykładowych zadań z Logiki i teorii mnogości II — 27 III

28 marca 2017

Zacniemy od rozwiązania przykładowego zadania dotyczącego sum i przecięć.

Zadanie 1. Niech $A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 1 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Rozwiązanie 1. Twierdzimy, że $\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n = [-1, 1]$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$. Chcemy pokazać, że $x \in [-1, 1]$. Wystarczy pokazać, że jeśli $x > 1$ lub $x < -1$, to $x \notin \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Przypuśćmy więc, że $x < -1$. Istnieje wówczas $\epsilon > 0$ taki, że $x = -1 - \epsilon$. Niech m_0 będzie dowolną liczbą taką, że

$$\frac{1}{m_0} < \epsilon.$$

Pokażemy, że

$$x \notin \bigcup_{n \geq m_0} A_n.$$

Weźmy dowolne n większe od m_0 . Jeśli n jest parzyste, to $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Skoro $x < -1$, to tym bardziej $x < -1 + \frac{1}{n}$, więc $x \notin A_n$. Jeśli zaś n jest nieparzyste, to $A_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Skoro jednak $n \geq m_0$, to

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m_0},$$

czyli

$$x = -1 - \epsilon < -1 - \frac{1}{m_0} \leq -1 - \frac{1}{n}.$$

Wynika stąd, że $x \notin A_n$. Z dowolności n wynika, że nie istnieje takie $n \geq m_0$, że $x \in A_n$, a stąd, że $x \notin \bigcup_{n \geq m_0} A_n$. Zatem $x \notin \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Podobnie można pokazać, że jeśli $x > 1$, to $x \notin \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$. Przy-
puśćmy więc, że $x > 1$. Wówczas istnieje takie $\delta > 0$, że $x = 1 + \delta$. Niech m_0
będzie dowolną liczbą taką, że

$$\frac{1}{m_0} < \delta.$$

Pokażemy, że $x \notin \bigcup_{n \geq m_0} A_n$. Weźmy więc dowolne $n \geq m_0$. Jeśli n jest niepa-
rzyste, to $A_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Skoro $x > 1$, to tym bardziej $x > 1 + \frac{1}{n}$, więc
 $x \notin A_n$. Przypuśćmy, że n jest parzyste. Wówczas

$$x = 1 + \delta > 1 + \frac{1}{m_0} \geq 1 + \frac{1}{n_0},$$

czyli $x \notin A_n$. Z dowolności n wynika, że nie istnieje $n \geq m_0$ takie, że $x \in A_n$.
Zatem $x \notin \bigcup_{n \geq m_0} A_n$, czyli $x \notin \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $x \in [-1, 1]$. Albo $x \in [-1, 0)$, albo $x \in [0, 1]$.

Jeśli $x \in [-1, 0)$, to dla dowolnego n nieparzystego $x \in A_n$ (ponieważ $-1 - \frac{1}{n} < -1$, a $1 - \frac{1}{n} \geq 0$). Podobnie, jeśli $x \in [0, 1]$, to dla dowolnego n parzystego
 $x \in A_n$, ponieważ $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ oraz $-1 + \frac{1}{n} < 0$ dla n parzystych (n musi bowiem
wynosić wówczas co najmniej 2).

Ustalmy dowolne m . Chcemy pokazać, że $x \in \bigcup_{n \geq m} A_n$. Jeśli $x \in [-1, 0)$,
to $x \in A_n$ dla dowolnego n nieparzystego, w szczególności dla dowolnego n
nieparzystego nie mniejszego od m_0 , a jeśli $x \in [0, 1]$, to $x \in A_n$ dla dowolnego
 n parzystego, w szczególności dla dowolnego n parzystego nie mniejszego od
 m_0 .

Wynika stąd, że istnieje $n \geq m_0$ takie, że $x \in A_n$. Czyli $x \in \bigcup_{n \geq m_0} A_n$. Z
dowolności m_0 wynika więc, że $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Pokażemy rozwiązanie przykładowego zadania na obrazy i przeciwobrazy
funkcji.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = (x - 2)^2 + 5$. Znaj-
dziemy obraz i przeciwobraz odcinka $[1, 6]$ przy funkcji f .

Rozwiązanie 2. Znajdziemy najpierw $f[[1, 4]]$. Twierdzimy, że $f[[1, 6]] = [5, 21]$.
($\subseteq$) Weźmy dowolny $y \in f[[1, 6]]$. Zauważmy, że skoro $(x - 2)^2 \geq 0$, to $f(x) \geq 5$
dla dowolnego x . Czyli $y \geq 5$. Z drugiej strony funkcja ciągła osiąga na od-
cinku domkniętym swoje maksimum. Sprawdzamy, że funkcja f nie ma w
ogóle maksimumów lokalnych, bo jest funkcją wielomianową drugiego stopnia o
dodatnim współczynniku przy najwyższej potęgze. Zatem maksimum na od-
cinku $[1, 6]$ jest osiągnięte w punkcie 1 lub w punkcie 6. Łatwo sprawdzamy, że
 $f(1) = 6$ a $f(6) = 21$. Czyli maksymalna wartość f na odcinku $[1, 6]$ wynosi 21.
Czyli $y \leq 21$. ($\supseteq$) Weźmy dowolny $y \in [5, 21]$. Zauważamy, że $5 = f(2)$ oraz

$21 = f(6)$. Funkcja f jest ciągła, więc na mocy własności wartości średniej dla dowolnego $y \in [5, 21]$ istnieje takie $x \in [1, 6]$, że $y = f(x)$.

Znajdziemy teraz $f^{-1}[[1, 6]]$. Chcemy wyznaczyć zbiór x takich, że $f(x) \in [1, 6]$, czyli scharakteryzować takie x , dla których

$$\begin{cases} (x-2)^2 + 5 \geq 1 \\ (x-2)^2 + 5 \leq 6. \end{cases}$$

Zauważamy, że pierwszy warunek jest zawsze spełniony, chcemy więc znaleźć takie x , dla których

$$(x-2)^2 + 5 \leq 6.$$

To jest równoważne:

$$(x-2)^2 \leq 1,$$

co jest równoważne układowi warunków

$$\begin{cases} (x-2) \leq 1 \\ (x-2) \geq -1. \end{cases}$$

Co jest równoważne stwierdzeniu, że $x \in [1, 3]$.