

Rozwiązania przykładowych zadań z Logiki i teorii mnogości II — 20 III

21 marca 2017

Niniejszy plik zawiera przykładowe rozwiązanie zadania na sumy i przecięcia z zajęć 20 III. Ponadto znajdują się w nim przykładowe rozwiązania zadań z kolokwium, które odbyło się 13 III.

Przypomnijmy najpierw, że jeśli $(A_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ jest rodziną zbiorów indeksowaną liczbami naturalnymi dodatnimi, to

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$$

oznacza zbiór tych x , dla których istnieje takie m_0 , że $x \in A_n$ dla dowolnego $n \geq m_0$. Innymi słowy jest to zbiór tych x , które należą do wszystkich zbiorów A_n dla dostatecznie dużych n . Jeszcze inaczej: x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy mogą znaleźć takie m_0 , że x należy już do wszystkich zbiorów $A_{m_0}, A_{m_0+1}, A_{m_0+2}, \dots$

Podobnie

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \geq m} A_n$$

oznacza zbiór tych x , że dla dowolnego m istnieje takie $n \geq m$, że $x \in A_n$. Innymi słowy jest to zbiór tych x , które należą do zbiorów A_n dla *dowolnie dużych* n . Znaczy to, że x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy dla jakiegokolwiek $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mogą znaleźć $n \geq m$ takie, że $x \in A_n$.

Oznaczenia te można rozszerzyć na przypadek, gdy rozważana rodzina zbiorów jest indeksowana innym zbiorem z porządkiem, na przykład liczbami rzeczywistymi $\mathbb{R}$. Wówczas

$$\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \bigcap_{t \geq s} A_t$$

oznacza zbiór tych x , dla których istnieje $s \in \mathbb{R}$ takie, że $x \in A_t$ dla dowolnego $t \geq s$.

Podobnie

$$\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq s} A_t$$

jest zbiorem tych x , że dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$ istnieje $t \geq s$ takie, że $x \in A_t$.

Zadanie 1. Niech $A_n = [-1 + \frac{(-1)^n}{n}, 1 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Rozwiązanie 1. Twierdzimy, że $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n = (-1, 1)$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$. Z definicji istnieje takie m_0 , że $x \in \bigcap_{n \geq m_0} A_n$, to znaczy $x \in A_n$ dla dowolnego $n \geq m_0$. W szczególności $x \in A_{n_0}$ dla pewnego n_0 większego od m_0 i parzystego oraz $x \in A_{n_1}$ dla pewnego n_1 większego od m_0 i nieparzystego.

Zauważmy, że $A_{n_0} = [-1 + \frac{1}{n_0}, 1 + \frac{1}{n_0}]$, bo n_0 jest parzyste. Skoro $x \in A_{n_0}$, to $x \geq -1 + \frac{1}{n_0}$, czyli $x > -1$. Podobnie, $A_{n_1} = [-1 - \frac{1}{n_1}, 1 - \frac{1}{n_1}]$, bo n_1 jest nieparzyste. Skoro $x \in A_{n_1}$, to $x \leq 1 - \frac{1}{n_1}$, czyli $x < 1$. To pokazuje, że $x \in (-1, 1)$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $x \in (-1, 1)$. Pokażemy, że $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$, to znaczy znajdziemy takie m_0 , że $x \in A_n$ dla dowolnego $n \geq m_0$.

Zachodzi jeden z dwóch przypadków: albo (I) $x \in (-1, 0)$, albo (II) $x \in [0, 1)$.

Jeśli zachodzi przypadek (I), to niech $\epsilon = x - (-1)$ (to znaczy: ϵ to długość odcinka poprowadzonego od -1 do x). Skoro $x > -1$, to ϵ jest liczbą dodatnią. Niech m_0 będzie dowolną liczbą taką, że $\frac{1}{m_0} < \epsilon$.

Weźmy dowolne $n \geq m_0$. Pokażemy, że $x \in A_n$. Jeśli n jest nieparzyste, to $A_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Skoro $x > -1$, to $x \geq -1 - \frac{1}{n}$. Ponadto $1 - \frac{1}{n} \geq 0 > x$. Czyli $x \in A_n$. Jeśli n jest parzyste, to $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Skoro $n \geq m_0$, to

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m_0}.$$

Skoro więc $x - (-1) = \epsilon > \frac{1}{m_0} \geq \frac{1}{n}$, to

$$x - (-1) > \frac{1}{n},$$

czyli

$$x > -1 + \frac{1}{n}.$$

Ponadto skoro $x < 0$, to $x < 1 + \frac{1}{n}$. Czyli $x \in A_n$.

Pokazaliśmy więc, że jeśli $x \in (-1, 0)$, to $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Rozważmy teraz przypadek (II), który jest bardzo podobny do przypadku (I). Zakładamy, że $x \in [0, 1)$. Niech $\epsilon = 1 - x$. Skoro $x < 1$, to ϵ jest liczbą dodatnią. Niech m_0 będzie dowolną taką liczbą, że

$$\frac{1}{m_0} < \epsilon.$$

Pokażemy, że $x \in \bigcap_{n \geq m_0} A_n$. Weźmy dowolne $n \geq m_0$. Pokażemy, że $x \in A_n$. Ponownie, n albo jest parzyste, albo nieparzyste. Jeśli n jest parzyste, to $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Skoro $x \geq 0$, to $x > -\frac{1}{2} \geq -1 + \frac{1}{n}$ (n jest nie mniejsze niż 2, bo n jest parzystą liczbą dodatnią). Ponadto $1 + \frac{1}{n} > 1 > x$. Czyli $x \in A_n$.

Przypuśćmy więc, że n jest nieparzyste. Wówczas $A_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Skoro $x \geq 0$, to $x > -1 - \frac{1}{n}$. Pozostaje więc pokazać, że $x < 1 - \frac{1}{n}$. Wiemy jednak, że $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m_0} < \epsilon = 1 - x$. Czyli

$$x < 1 - \frac{1}{n}.$$

Wynika stąd, że $x \in A_n$. Z dowolności n wnioskujemy, że $x \in \bigcap_{n \geq m_0} A_n$, a zatem $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Pokazaliśmy więc, że jeśli $x \in (-1, 0)$, to $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$, oraz że jeśli $x \in [0, 1)$, to $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$. Wnioskujemy więc, że $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \geq m} A_n$. $\square$

Zadania z kartkówki z 13 III

Zadanie 2. Niech $A_n = [(-1)^n, 1 + \frac{1}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Rozwiązanie 2. Twierdzimy, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = \{1\}$.

($\supseteq$). Chcemy pokazać, że $\{1\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, tzn. $1 \in A_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Weźmy dowolne n . Jeśli n jest parzyste, to $A_n = [1, 1 + \frac{1}{n}]$, jeśli n jest nieparzyste, to $A_n = [-1, 1 + \frac{1}{n}]$. W obu przypadkach $1 \in A_n$.

($\subseteq$). Przypuśćmy, że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Chcemy pokazać, że $x = 1$. Skoro $x \in A_2 = [1, \frac{3}{2}]$, to $x \geq 1$. Musimy więc pokazać, że x nie jest większe od 1.

Przypuśćmy, że $x > 1$. Niech $\epsilon = x - 1$. Niech n_0 będzie dowolną liczbą taką, że

$$\frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Wówczas

$$1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \epsilon = x.$$

Czyli $x \notin A_{n_0}$, a więc w szczególności $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Zatem, skoro $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, to $x \leq 1$. Wnioskujemy stąd, że $x = 1$.

Zadanie 3. Niech $A_n = (0 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{2}{n})$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Rozwiązanie 3. Pokażemy, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = (0, 3) \setminus \{2\}$.

($\subseteq$) Niech $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Wówczas istnieje takie n_0 , że $x \in A_{n_0}$, czyli

$$x \in (0 + \frac{2}{n_0}, 1 + \frac{2}{n_0}).$$

Jest jasne, że $x > 0$. Skoro $1 + \frac{2}{n_0} \leq 3$, to $x < 3$. Co więcej, jeśli $n_0 \geq 2$, to $1 + \frac{2}{n_0} \leq 2$. Skoro więc $x < 1 + \frac{2}{n_0}$, to $x < 2$. Z drugiej strony, jeśli $n_0 = 1$, to $x > 0 + \frac{2}{n_0} = 2$. W obu wypadkach $x \neq 2$.

($\supseteq$) Załóżmy, że $x \in (0, 3) \setminus \{2\}$. Pokażemy, że $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Rozważmy następujące przypadki:

I $x \in (2, 3)$.

II $x \in (1, 2)$.

III $x \in (0, 1]$.

Jeśli zachodzi przypadek (I), to $x \in A_1$. Jeśli zachodzi przypadek (II), to $x \in A_2$. Załóżmy więc, że zachodzi przypadek (III). Niech n_0 będzie dowolną liczbą taką, że

$$\frac{1}{n_0} < \frac{x}{2}.$$

Wówczas mamy również $x \leq 1 < 1 + \frac{2}{n_0}$ oraz $x > \frac{2}{n_0}$. Czyli $x \in A_{n_0}$.

Pokazaliśmy więc, że istnieje takie n , że $x \in A_n$, a zatem $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.