

Rozwiązania przykładowych zadań z Logiki i teorii mnogości II — rodziny podwójnie indeksowane

28 marca 2017

Niniejszy plik zawiera przykładowe rozwiązania zadań na znajdowanie sum i przecięć podwójnie indeksowanych rodzin zbiorów.

Zadanie 1. Niech $A_{m,n} = [-\frac{1}{n}, \frac{m}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Rozwiązanie 1. (A) Twierdzimy, że $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n} = \{0\}$. ($\supseteq$) Chcemy pokazać, że $\{0\} \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$, czyli że $0 \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Wystarczy w tym celu pokazać, że $0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{1,n}$. Ustalmy więc dowolne $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zauważmy, że $-\frac{1}{n_0} < 0$, a $\frac{1}{n_0} > 0$. Zatem $0 \in [-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}]$, tzn. $0 \in A_{1,n_0}$. Z dowolności n_0 wynika, że $0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{1,n}$, a zatem $0 \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Pokażemy, że $x = 0$.

Skoro $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$, to istnieje takie m_0 , że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m_0,n}$. Przypuśćmy teraz, że $x \neq 0$. Skoro $x \neq 0$, to $|x| > 0$. Czyli istnieje takie n_0 , że

$$\frac{m_0}{n_0} < |x|.$$

Wówczas tym bardziej $\frac{1}{n_0} < |x|$. Mamy zatem: $x > \frac{m_0}{n_0}$, jeśli x jest dodatni i $x < -\frac{1}{n_0}$, jeśli x jest ujemny. W każdym wypadku $x \notin [-\frac{1}{n_0}, \frac{m_0}{n_0}]$. Czyli $x \notin A_{m_0,n_0}$, a więc w szczególności $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m_0,n}$. Tymczasem założyliśmy, że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m_0,n}$, a więc $x = 0$. $\square$

(B) Twierdzimy, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n} = [0, +\infty)$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Pokażemy, że $x \in [0, +\infty)$, tzn. że x nie jest liczbą ujemną. Przypuśćmy więc, że jednak $x < 0$. Wówczas istnieje takie n_0 , że $x < -\frac{1}{n_0}$. Z tego wynika, że dla dowolnego m

$$x \notin \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{m}{n_0}\right].$$

Czyli $x \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n_0}$, a zatem z definicji przecięcia

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}.$$

($\supseteq$). Weźmy dowolne $x \in [0, \infty)$. Pokażemy, że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Ustalmy więc dowolne n_0 . Chcemy pokazać, że $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n_0}$.

Weźmy dowolne m_0 , które jest większe niż $n_0 x$. To gwarantuje, że $\frac{m_0}{n_0} > x$. Z drugiej strony $-\frac{1}{n_0} < x$, bo x jest liczbą nieujemną. Z tego wynika, że

$$x \in \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{m_0}{n_0} \right].$$

To znaczy, że $x \in A_{m_0,n_0}$, a więc $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n_0}$. Z dowolności n_0 wnioskujemy, że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 2. Niech $A_{m,n} = [m - (1 - \frac{1}{n}), m + (1 - \frac{1}{n})]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$ oraz $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Rozwiązanie 2. (A) Twierdzimy, że $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n} = (0, +\infty)$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Pokażemy, że $x \in (0, +\infty)$, tzn. $x > 0$. Z założenia, jeśli $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$, to istnieje takie $m_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, że $x \in A_{m_0,n_0}$. Wystarczy zauważyć, że $1 - \frac{1}{n_0} < 1$ a $m_0 \geq 1$. Zatem $m_0 - (1 - \frac{1}{n_0}) > 0$. Czyli z faktu, że $x \in [m_0 - (1 - \frac{1}{n_0}), m_0 + (1 - \frac{1}{n_0})]$, wynika, że $x > 0$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $x \in (0, +\infty)$. Chcemy pokazać, że $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Jeśli x jest liczbą naturalną dodatnią, to $x \in A_{x,1}$, bo $A_{x,1} = \{x\}$. Jeśli x nie jest liczbą naturalną, to niech m_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną większą niż x . Wówczas $x \in [m_0 - 1, m_0]$. Jeśli $m_0 \neq 1$, to

$$x \in A_{m_0,2} \cup A_{m_0-1,2}.$$

Mianowicie $A_{m_0,2} \cup A_{m_0-1,2} = [m_0 - \frac{3}{2}, m_0 + \frac{1}{2}]$.

Jeśli $m_0 = 1$, to $x \in (0, 1]$. Wówczas niech n_0 będzie dowolną taką liczbą, że $\frac{1}{n_0} < x$. Z tej nierówności i z definicji m_0 (to najmniejsza liczba naturalna większa od x , w naszym wypadku 1) wnioskujemy, że

$$x \in \left[1 - 1 + \frac{1}{n_0}, 1 + 1 - \frac{1}{n_0} \right].$$

Czyli $x \in A_{m_0,n_0}$. Zatem istnieje takie $m_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i takie $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, że $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. $\square$

(B) Pokażemy, że $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

($\supseteq$) Weźmy dowolną liczbę naturalną dodatnią k . Chcemy pokazać, że $k \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Wystarczy pokazać, że $k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{k,n}$. Weźmy

więc dowolne $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Skoro $k - 1 + \frac{1}{n_0} \leq k \leq k + 1 + \frac{1}{n_0}$, to $k \in [k - (1 - \frac{1}{n_0}), k + (1 - \frac{1}{n_0})]$. Czyli $k \in A_{k,n_0}$. Z dowolności n_0 wnioskujemy, że $k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{k,n}$. Zatem $k \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$. Chcemy pokazać, że $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Skoro $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$, to istnieje takie m_0 , że $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m_0,n}$. Skoro dla dowolnego n $x \in A_{m_0,n}$, to w szczególności $x \in A_{m_0,1}$. Tymczasem $A_{m_0,1} = \{m_0\}$, więc $x = m_0$, z czego wynika, że $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.