

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 27 II

28 marca 2017

Niniejszy plik zawiera przykładowe rozwiązania zadań na znajdowanie sum i przecięć rodzin odcinków na prostej rzeczywistej.

Zadanie 1. Niech dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ odcinki $A_n \subset \mathbb{R}$ będą zdefiniowane jako $[3 - \frac{6}{n+1}, 4 - \frac{6}{n+1}]$. Wyznacz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Zanim zapiszemy rozwiązanie, próbujemy wyobrazić sobie rodzinę odcinków A_n . Po chwili refleksji stwierdzamy, że zawsze mają długość 1, a lewy koniec wędruje od punktu 0 do punktu 3, którego nigdy nie osiąga. Jego położenie „końcowe” i początkowe są rozłączne, więc przecięcie powinno być puste.

Rozwiązanie 1. Twierdzimy, że

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = \emptyset.$$

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje jakiś $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Wówczas w szczególności $x \in A_1$ oraz $x \in A_{2017}$. Skoro $x \in A_1 = [0, 1]$, to $x \leq 1$. Z drugiej strony $x \in A_{2017} = [3 - \frac{6}{2018}, 4 - \frac{6}{2018}]$, czyli $x \geq 3 - \frac{6}{2018}$. Zauważmy jednak, że $\frac{6}{2018} < 1$, czyli

$$x \geq 3 > 3 - \frac{6}{2018} > 2.$$

Ustaliliśmy zatem, że x jest nie większy niż 1, a zarazem większy niż 2. Użyta sprzeczność kończy dowód.

Dalej, twierdzimy, że

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = [0, 4).$$

($\subseteq$). Weźmy dowolne $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Z definicji istnieje takie n_0 , że $x \in A_{n_0}$, czyli

$$x \in [3 - \frac{6}{n+1}, 4 - \frac{6}{n+1}].$$

Skoro $\frac{6}{n+1} \leq 3$ a $x \geq 3 - \frac{6}{n+1}$, to $x \geq 0$. Skoro $\frac{6}{n+1} > 0$ a $x \leq 4 - \frac{6}{n+1}$, to $x < 4$. Czyli $x \in [0, 4]$.

($\supseteq$). Weźmy dowolne $x \in [0, 4)$. Zachodzi jeden z poniższych przypadków: (I) $x \in [0, 1)$, (II) $x \in [1, 2)$, (III) $x \in [2, 3)$, (IV) $x \in [3, 4)$. Rozważmy je kolejno.

(I) Jeśli $x \in [0, 1)$, to w szczególności $x \in [0, 1] = A_1$. Czyli istnieje takie n , że $x \in A_n$, więc z definicji $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

(II) Jeśli $x \in [1, 2)$, to w szczególności $x \in [1, 2] = A_2$. Czyli istnieje takie n , że $x \in A_n$, więc z definicji $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

(III) Jeśli $x \in [2, 3)$, to w szczególności $x \in [2, 3] = A_6$. Podobnie, jak w przypadkach (I), (II) $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

(IV) Załóżmy, że $x \in [3, 4)$. Niech

$$\epsilon = 4 - x.$$

Skoro ciąg $\frac{6}{n+1}$ dąży do 0, to istnieje takie n_0 , że

$$\epsilon > \frac{6}{n_0 + 1} > 0.$$

W szczególności

$$4 - \frac{6}{n_0 + 1} > 4 - \epsilon = x.$$

Z drugiej strony

$$3 - \frac{6}{n_0 + 1} \leq 3 \leq x.$$

Czyli $x \in A_{n_0}$. Zatem $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. To kończy dowód. $\square$

Zadanie 2. Niech dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$A_n = \left[(-1)^n \frac{n}{n+1}, 3 + (-1)^n \frac{n}{n+1} \right].$$

Wyznacz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Zanim przystąpimy do spisywania rozwiązania, ponownie wyobrażamy sobie, jak zachowują się zbiory A_n . Tym razem widzimy odcinek o długości 3 drgający w ten sposób, że jego wychylenie się zwiększa.

Rozwiązanie 2. Twierdzimy, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = (-1, 4)$. ($\subseteq$) Weźmy dowolny $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Z założenia istnieje takie n_0 , że $x \in A_{n_0}$. Oznacza to, że

$$x \in \left[(-1)^{n_0} \frac{n_0}{n_0 + 1}, 3 + (-1)^{n_0} \frac{n_0}{n_0 + 1} \right].$$

Jednak skoro $n + 1 > n$ dla dowolnego n , to $\frac{n_0}{n_0 + 1} < 1$. Czyli

$$\frac{n}{n+1} (-1)^n > -1$$

oraz

$$3 + \frac{n}{n+1}(-1)^n < 4.$$

Co pokazuje, że $x \in (-1, 4)$.

($\supseteq$). Weźmy teraz dowolny $x \in (-1, 4)$. Rozważmy dwa przypadki: (I) albo $x \in (-1, 0)$, albo (II) $x \in [0, 3)$, albo (III) $x \in [3, 4)$.

Jeśli zachodzi przypadek (I), to niech $\epsilon = |-1 - x|$ (czyli to odległość między -1 a x). Skoro $\frac{n}{n+1}$ dąży do 1, to istnieje takie N , że dla dowolnego $m > N$

$$1 - \frac{m}{m+1} < \epsilon = |-1 - x| = 1 + x.$$

Weźmy dowolne nieparzyste m większe od N . Mamy wówczas:

$$\frac{m}{m+1}(-1)^m = -\frac{m}{m+1} < x.$$

Z drugiej strony $\frac{m}{m+1} < 1$, więc $3 - \frac{m}{m+1} > 0$. Zatem

$$x \in \left[(-1)^m \frac{m}{m+1}, 3 + (-1)^m \frac{m}{m+1} \right] = A_m.$$

Stąd wynika, że $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Założmy teraz, że zachodzi przypadek (II). Zauważmy, że $A_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, a $A_2 = [\frac{2}{3}, \frac{11}{3}]$. Czyli $(0, 3) \subset A_1 \cup A_2$. Z założenia $x \in [0, 3)$. Zatem $x \in A_1$ lub $x \in A_2$. W szczególności $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Założmy wreszcie, że zachodzi przypadek (III). Ten przypadek jest bardzo podobny do przypadku (I). Niech $\epsilon = 4 - x$. Ponownie $0 < \epsilon < 1$. Korzystając ze zbieżności ciągu $\frac{n}{n+1}$ do 1 ustalmy takie N , że dla dowolnego $m > N$

$$1 - \frac{m}{m+1} < \epsilon = 4 - x.$$

Ustalmy dowolne parzyste $m > N$. Mamy wówczas:

$$3 + (-1)^m \frac{m}{m+1} = 3 + \frac{m}{m+1} > x.$$

Z drugiej strony

$$\frac{m}{m+1} < 1 < 3 \leq x.$$

Czyli

$$x \in \left[\frac{m}{m+1}, 3 + \frac{m}{m+1} \right] = A_m.$$

W szczególności $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$.

Co kończy dowód w wypadku sumy.

Twierdzimy, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = [1, 2]$.

($\supseteq$) Weźmy dowolny $x \in [1, 2]$. Ustalmy dowolne n . Jeśli n jest parzyste, to $A_n = [\frac{n}{n+1}, 3 + \frac{n}{n+1}]$. Skoro $n + 1 > n$, to $\frac{n}{n+1} < 1$. Skoro zaś $\frac{n}{n+1} > 0$, to $3 + \frac{n}{n+1} > 2$, czyli x jest elementem dowolnego A_n dla n parzystego. Jeśli n jest nieparzyste, to $A_n = [-\frac{n}{n+1}, 3 - \frac{n}{n+1}]$. Skoro $-1 < -\frac{n}{n+1}$, to $3 - \frac{n}{n+1} > 2$. Z drugiej strony $-\frac{n}{n+1} < 0 < 1$. Czyli $x \in A_n$, jeśli n jest nieparzyste. To pokazuje, że dla dowolnego $x \in [1, 2]$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy $x \in A_n$.

($\subseteq$) Weźmy dowolne $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$. Pokażemy, że $x \in [1, 2]$. Przypuśćmy przeciwnie, że $x < 1$. Niech w takim wypadku $\epsilon = 1 - x$. Ciąg $\frac{n}{n+1}$ zbiega do 1 i wszystkie jego wyrazy są mniejsze niż 1. Istnieje zatem takie N , że dla dowolnego $n > N$

$$1 - \frac{n}{n+1} > \epsilon.$$

Weźmy dowolne takie parzyste n . Wówczas

$$x < \frac{n}{n+1} = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

a zatem $x \notin A_n$.

Podobnie, jeśli $x > 2$, to ustalamy $\epsilon = x - 2$ i znajdujemy takie N , że dla dowolnego $n > N$

$$1 - \frac{n}{n+1} < \epsilon.$$

Tym razem ustalamy dowolnego $n > N$ nieparzyste. Widzimy wówczas, że

$$3 - \frac{n}{n+1} < 2 + \epsilon = x.$$

Czyli

$$x \notin A_n.$$

To kończy dowód.