

Zbiór zadań do Logiki i Teorii Mnogości II

Bartosz Wcisło, Mateusz Łętyk

19 kwietnia 2017

1 Podstawowe operacje na ziorach

Zadanie 1 (MŁ). Znajdź $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ jeśli

1. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 100\}$, $C = \mathbb{N}$.
2. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ nie jest liczbą pierwszą}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3|n\}$,
 $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|n\}$.
3. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 13\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2\}$, $C = \mathbb{N}$.
4. A jest zbiorem punktów płaszczyzny leżących na paraboli $y = x^2$,
 B jest zbiorem punktów leżących na osi x , C jest zbiorem punktów
płaszczyzny.

Zadanie 2 (BW). Niech U będzie zbiorem ciągów skończonych o wyrazach $\{a, b, c\}$ (słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$). Niech A będzie zbiorem ciągów z X , których pierwszym wyrazem jest a . Niech B będzie zbiorem ciągów z X , w których występuje parzyście wiele liter b i niech C będzie zbiorem ciągów z X , w których nie występuje litera c . Dla podanych poniżej zbiorów podaj przykłady elementów X , które należą do wymienionych zbiorów, i które do nich nie należą.

1. $A \cup B$.

2. $A \cap B$.
3. $A \setminus (B \setminus C)$.
4. $(A \setminus B) \setminus C$.
5. $A \cup (B \setminus (A \cap C))$.

Zadanie 3 (MŁ). Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów zachodzą poniższe równości lub znajdź kontrprzykład:

1. $A \cap B = A \cap (A \cup B)$
2. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$
3. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
5. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
9. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
10. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
11. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Zadanie 4 (MŁ). Załóżmy, że $A, B \subseteq C$. Pokaż, że

1. $A \cap B = C \setminus ((C \setminus A) \cup (C \setminus B))$
2. $A \cup B = C \setminus ((C \setminus A) \cap (C \setminus B))$

Definicja 1. Dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zdefiniujemy

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \Delta B$ nazywamy różnicą symetryczną zbiorów A, B

Zadanie 5 (MŁ). 1. Przedstaw różnicę symetryczną A, B na diagramie Venne'a.

2. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

Zadanie 6. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów zachodzi

1. $A \cap B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$.
2. $A \setminus B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \setminus B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$.
4. $A \Delta B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.
5. $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B \cup C$.

Niech $\mathcal{P}(A)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru A

Zadanie 7 (MŁ). Sprawdź czy dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzą

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
2. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$.

2 Suma i iloczyn indeksowanej rodziny zbiorów

Zadanie 8 (MŁ). Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

1. $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$
2. $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x > n^2\}$
3. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - n| \leq 1\}$
4. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - n \leq 3\}$

5. $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ jest dzielnikiem } x\}$

6. $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 2(n+1) \text{ jest dzielnikiem } x\}$

7. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n+1}\}.$

Zadanie 9 (MŁ). Niech $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$, $B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n^2\}$. Pokaż, że

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_n) = \emptyset$

2. $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \mathbb{N}$

Zadanie 10 (MŁ). Udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzą poniższe stwierdzenie lub znajdź kontrprzykład:

1. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

2. jeśli dla pewnego n , $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

3. jeśli dla wszystkich n , $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

4. jeśli dla wszystkich n , $A_n \setminus B_n \neq \emptyset$, to $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \neq \emptyset$

Zadanie 11 (BW). Niech dla $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \{n\}$, $B_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$. Wyznacz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Zadanie 12 (BW). Niech A_n będzie zbiorem funkcji o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i dziedzinie $\{0, 1, \dots, n\}$. Opisz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 13 (BW). Niech $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n|k\}$, gdzie relację podzielności $n|k$ definiujemy jako $\exists m \ m \cdot n = k$. Znajdź zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 14 (BW). Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, gdzie dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zbiory A_n to następujące przedziały:

1. $(0, \frac{1}{n})$.

2. $[0, \frac{1}{n}]$.

3. $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
4. $[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$.
5. $[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.
6. $(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$.
7. $(n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n})$.
8. $[\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$.
9. $[\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}]$.
10. $[-\frac{1+\frac{1}{2}(-1)^n}{n}, 1 - \frac{1+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}}{n}]$.
11. $(-\frac{1}{n}, n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}]$.
12. $(0, n)$.
13. $(-\frac{1}{n}, n)$.
14. $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n})$.

Zadanie 15 (BW). Niech $A_n = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid n \in B\}$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 16 (BW). Niech $A_n = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid n \notin B\}$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 17 (BW). Niech $A_n = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \text{ ma co najmniej } n \text{ elementów}\}$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

W kolejnym zadaniu $\mathbb{R}[x]$ oznacza zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych.

Zadanie 18 (BW). Niech dla $p \in \mathbb{R}[x]$ A_p będzie zbiorem $\{n \in \mathbb{N} \mid p(0) \leq n\}$. Znajdź $\bigcup_{p \in \mathbb{R}[x]} A_p$, $\bigcap_{p \in \mathbb{R}[x]} A_p$.

Zadanie 19 (MŁ). Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

1. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1 - \frac{1}{n+1}, 3]\}$
2. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [n, n+2]\}$
3. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1 + \frac{1}{n^2+1}, 1 - \frac{1}{n+1}]\}$
4. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [2^{-n}, 2^n]\}$
5. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1})\}$

Zadanie 20 (MŁ). Znajdź $\bigcup_{x \in B} A_x$ oraz $\bigcap_{x \in B} A_x$ jeśli

1. $B = \mathbb{Q}, A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \frac{1}{3}\}$
2. $B = \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid x + y \geq 3\}$
3. $B = \mathbb{Z}, A_x = \{y \in \mathbb{N} \mid y + x \in \mathbb{N}\}$
4. $B = \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| = 3\}.$

Zadanie 21 (MŁ). Znajdź $\bigcup_n A_n$ i $\bigcap_n A_n$ jeśli

1. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{N} (|y - \frac{1}{n+1}| < \frac{1}{k+1})\}$
2. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{R} (ky - n = 0)\}$
3. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall k < n, k \in \mathbb{N} (y \in [k+1, n])\}$
4. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists k < n, k \in \mathbb{N} (y \in [k+1, n])\}$
5. $A_n = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Q} (|y - n| < q)\}$
6. $A_n = \{y \in \mathbb{Z} \mid \forall k \in \mathbb{N} (|y - n| < \frac{1}{k+1})\}$
7. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists q \in \mathbb{Q} (|y - q| < \frac{1}{n+1})\}$
8. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge \forall k \in \mathbb{N} (y \leq n^{k+1})\}$
9. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge \exists k \in \mathbb{N} (y \leq \frac{k}{n+1})\}$
10. $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge \exists k \in \mathbb{N} (y \leq \frac{n}{k+1})\}$

Zadanie 22 (MŁ). Niech $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą dwiema rodzinami zbiorów. Pokaż, że jeśli $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subseteq B_n$, to $\mathcal{P}(\bigcup_n A_n) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_n B_n)$.

Zadanie 23 (Dla chętnych; MŁ). Niech (a_n) będzie ograniczonym i zbieżnym ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a_n\}$. Pokaż, że

1. jeśli (a_n) jest rosnący, to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$
2. jeśli (a_n) jest malejący, to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$

Czy obydwa podpunkty pozostaną prawdziwe dla dowolnego ciągu (a_n) ?

W następnym zadaniu można używać własności **zupełności liczb rzeczywistych w sensie Cauchy'ego**: dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takiego, że dla dowolnego ϵ istnieje takie N , że dla dowolnych $n, m > N$

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

istnieje granica $L \in \mathbb{R}$, do której zbiega ciąg (a_n) .

Zadanie 24 (Dla chętnych, BW). Niech $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ będą takimi przedziałami, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Udowodnij, że przecięcie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

jest niepuste.

Zadanie 25 (Dla chętnych, BW). Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że istnieje liczba rzeczywista, która nie jest wyrazem tego ciągu. Pokaż, że nie jest to prawda w wypadku liczb całkowitych.

Teza poprzedniego zadania głosi, mówiąc intuicyjnie, że liczb rzeczywistych jest więcej niż naturalnych. Do tego głębokiego faktu wrócimy jeszcze zapewne w ramach kursu z logiki i teorii mnogości II.

3 Operacje na podwójnie indeksowanych rodzinach zbiorów

Zadanie 26 (BW). Niech $A_{m,n} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 27 (BW). Niech $A_{m,n} = [m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 28 (BW). Niech $A_{m,n} = [-\frac{m}{n}, +\frac{m}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}, \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 29 (BW). Niech $A_{m,n} = [-m, \frac{m}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 30 (BW). Niech $A_{q,\epsilon} = (q - \epsilon, q + \epsilon)$ dla $q \in \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{R}_+$. Znajdź $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{R}_+} A_{q,\epsilon}$ oraz $\bigcap_{\epsilon \in \mathbb{R}_+} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,\epsilon}$.

Zadanie 31 (BW). Niech $A_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} \mid z^2 \leq x^2 - y^2\}$. Znajdź $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \bigcup_{y \in \mathbb{R}} A_{x,y}$ oraz $\bigcap_{y \in \mathbb{R}} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{x,y}$.

Zadanie 32 (BW). Dla $p \in \mathbb{R}[x], x \in \mathbb{R}$ niech $A_{p,x} = \{y \in \mathbb{R} \mid p(x) \leq y\}$. Znajdź $\bigcap_{p \in \mathbb{R}[x]} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{p,x}$ oraz $\bigcup_{p \in \mathbb{R}} \bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_{p,x}$.

Zadanie 33 (BW). Niech $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych. Dla $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ niech $A_{s,n} = \{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid s_k = t_k \text{ dla dowolnego } k \leq n\}$. Znajdź $\bigcup_{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{s,n}$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} A_{s,n}$.

Zadanie 34 (BW). Niech A_n dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ będzie zdefiniowane w następujący sposób. $A_1 = (-7, -5)$ oraz $A_n = (0, \frac{1}{n})$ dla $n > 1$. Znajdź $\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 35 (BW). Niech $A_n = (0, 1 + (-1)^n \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} A_n$ oraz $\bigcap_m \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 36 (BW). Niech $A_n = (0 + \frac{6}{2n}, 1 + \frac{6}{2n})$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{n \geq m} \bigcup_{m \geq n} A_n$.

Zadanie 37 (BW). Niech $A_t = (0 + \sin t, 1 + \sin t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq s} A_t$ oraz $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \bigcap_{t \geq s} A_t$.

Zadanie 38 (BW). Niech $A_t = [-1 - \sin t, 1 + \sin t]$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq s} A_t$ oraz $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \bigcap_{t \geq s} A_t$.

Zadanie 39 (BW). Niech $A_{m,n} = [-\frac{1}{m} - \frac{1}{n}, \frac{m}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

Zadanie 40 (BW). Niech $A_{m,n} = (m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n})$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_{m,n}$.

4 Podstawowe własności funkcji, obrazy i przeciwobrazy

Zadanie 41 (BW). Sprawdź, czy poniższe funkcje są injekcjami, i czy są surjekcjami.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 1$.
4. $f : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, f(n)$ to najmniejsze takie $k > 1$, że $k|n$.
5. $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}, f(X) = X \cup \{0\}$.
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$.
7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Zadanie 42 (BW). Wyznacz następujące obrazy i przeciwobrazy.

1. $f[[0, 1]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.
2. $f[[0, 3]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$.
3. $f^{-1}[[0, 3]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 5x - 5$.
4. $f^{-1}[[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.
5. $f[[0, 2]] \setminus \{1\}$, gdzie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.
6. $f^{-1}[(-\infty, 2]]$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$.

7. $f^{-1}[[3, +\infty)), f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$

***Zadanie 43 (BW).** Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowana wzorem

$$f(n, k) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + n$$

jest bijekcją.

5 Injekcje i surjekcje, równoliczność

Zadanie 44 (BW). Wskaż bijekcję między następującymi parami zbiorów:

1. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $[4, 5]$.
2. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $[0, 3]$.
3. Odcinek $[1, 2]$ i odcinek $[3, 500]$.
4. Odcinek $[a, b]$ i odcinek $[c, d]$, gdzie $a < b$ oraz $c < d$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Odcinek $(0, 1)$ i półprosta $(0, +\infty)$.
6. Półprosta $(0, +\infty)$ i prosta $(-\infty, +\infty)$.
7. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $(0, 1)$.

Zadanie 45 (BW). Wskaż bijekcję między $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

Zadanie 46 (BW). Wskaż injekcję z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ w $\mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ jest nieskończony}\}$.

Zadanie 47 (BW). Wskaż surjekcję ze zbioru $\mathcal{X}$ na $\mathcal{P}\mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ jest nieskończony}\}$.

Zadanie 48 (BW). Wskaż injekcję ze zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ w zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (zastanów się, jak za pomocą jednego podzbioru liczb naturalnych zakodować dwa podzbiory liczb naturalnych).

Zadanie 49 (BW). Wskaż bijekcję między $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, gdzie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach 0, 1.

Zadanie 50 (BW). Wskaż injekcję ze zbioru ciągów skończonych o wyrazach 0, 1 w zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach 0, 1, które od pewnego miejsca są stale równe 0 lub stale równe 1 (innymi słowy: ciągów zbieżnych o wyrazach 0, 1).

Zadanie 51 (BW). Wskaż injekcję ze zbioru ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych (czyli ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) w zbiór $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (zastanów się, jak można zakodować np ciąg (3, 17, 6, 2017, 4, ...) za pomocą ciągu samych zer i jedynek).

Zadanie 52 (BW). Udowodnij, że złożenie injekcji jest injekcją, złożenie surjekcji jest surjekcją, a złożenie bijekcji jest bijekcją.

Zadanie 53 (BW). Udowodnij, że $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 54 (BW). Udowodnij, że $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Zadanie 55 (BW). Udowodnij, że $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 56 (BW). Udowodnij, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

Zadanie 57 (BW). Udowodnij, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zadanie 58 (BW). Udowodnij, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 59 (BW). Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n\}$ są równoliczne.

Zadanie 60 (BW). Udowodnij, że zbiór funkcji liniowych o współczynnikach wymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych.

Zadanie 61 (BW). Udowodnij, że zbiór wielomianów stopnia 3 o współczynnikach wymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych.

Zadanie 62 (BW). Udowodnij, że zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s \text{ jest rosnący}\}$.

Zadanie 63 (BW). Udowodnij, że zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest równoliczny ze zbiorem $c_0 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a \text{ jest zbieżny do } 0\}$.

Zadanie 64 (BW). Udowodnij, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

Zadanie 65 (BW). Udowodnij, że zbiór $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1]\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zadanie 66 (BW). Udowodnij, że zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ jest nieskończony}\}$.

Zadanie 67 (MŁ). Znajdź bijekcję pomiędzy zbiorami A, B jeśli

1. $A = [1, 3], B = [-2, -3]$.
2. $A = (4, 17], B = [\frac{1}{17}, \frac{1}{4})$.
3. $A = (e, \pi), B = (4, 8)$.
4. $A = (9, 11), B = \mathbb{R}$.
5. $A = \mathbb{R}_-, B = \mathbb{R}$.
6. $A = (8, 16), B = \mathbb{R}_-$.
7. $A = \mathbb{R}_+, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.
8. $A = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid C \text{ zawiera wyłącznie liczby parzyste}\},$
 $B = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid C \text{ zawiera wyłącznie liczby nieparzyste}\}.$
9. $A = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid 0 \in C\}, B = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid 1 \in C\}.$
10. $A = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid C \text{ jest nieskończony}\},$
 $B = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus C \text{ jest nieskończony}\}.$
11. $A = \{(a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{jeśli } n \text{ jest parzyste, to } a_n = 0\},$
 $B = \{(a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste, to } a_n = 0\}.$
12. $A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, B = (0, 1).$
13. $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, B = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}.$

Zadanie 68 (MŁ). Znajdź bijekcję pomiędzy zbiorami $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ i $[0, 2]^{\mathbb{N}}$ (elementy tych zbiorów to ciągi nieskończone o wyrazach ze zbiorów $[-1, 1]$ i $[0, 2]$ odpowiednio.)

Zadanie 69 (MŁ). Udowodnij, że istnieje iniekcja $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 70 (MŁ). Udowodnij, że $(0, 1]$ jest równoliczny z $(0, 1)$.

Wskazówka: Prześledź dowód tego, że $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ podany na wykładzie.

***Zadanie 71 (MŁ).** Pokaż, że $D^2 := \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 72 (MŁ). Dla każdego z poniższych zbiorów zdecyduj czy jest równoliczny z $\mathbb{N}$, czy $\mathbb{R}$ i przedstaw dowód, że tak jest:

1. $\mathbb{N}^3$
2. $\mathbb{R}^2$
3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
4. $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2$
5. $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (koło o promieniu 1)
6. $[0, 1]$
7. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
8. $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$
9. $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Q}}$
10. $[0, 1] \times [0, 1]$
11. $[0, 1] \times \mathbb{N}$
12. $\mathbb{N} \times (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})$
13. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
14. $(0, 1)^{\mathbb{Z}}$

15. $\{(a_n) \in 2^{\mathbb{N}} \mid a_n = 1 \text{ dla nieskończenie wielu } n\}$
16. $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ jest ciągiem rosnącym}\}$
17. $* \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ jest ciągiem nierosnącym}\}$
18. $\{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ jest ciągiem rosnącym}\}$
19. $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi\}$.
20. $* \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ jest ciągła}\}$
21. $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ jest nieskończony}\}$
22. $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

Zadanie 73 (MŁ). Udowodnij, że

1. $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$,
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$,
3. $(\mathbb{N}^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Z}} \sim \mathbb{R}$,
4. $2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$

***Zadanie 74 (MŁ).** Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_j\}_{j \in J}$ taką, że

1. dla dowolnego $j \in J$, $A_j \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem (skończonej długości)
2. dla dowolnych $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{j \in J} A_j = \mathbb{R}$

Pokaż, że $J \sim \mathbb{N}$.