

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

19 października 2018

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać najpóźniej na zajęciach 29 października.

Zadanie 1. Niech $\|\cdot\|'$ będzie pewną normą na $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że zbiór ograniczony w normie $\|\cdot\|'$ jest ograniczony w normie euklidesowej.

Zadanie 2. Zbadaj, czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^4} \right|} - \sqrt{\left| \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^2} \right|}.$$

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, gdzie

$$f = \begin{cases} x^2 y^3 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną i przyjmuje wartość 0 dla $|x| = |y|$. Udowodnij, że różniczka f w punkcie $(0,0)$ jest przekształceniem zerowym. (Tzn. dla dowolnego v mamy $Df_{(0,0)}(v) = 0$).

Zadanie 5. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f = \begin{cases} \frac{\cos(xy^2+x^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$