

Zadania z Analizy Matematycznej II — seria VII

21 stycznia 2019

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać najpóźniej na zajęciach 25 stycznia.

Zadanie 1. Wyznacz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Zadanie 2. Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-c+a_n} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-c} dx}{a_n}$, gdzie a_n jest ciągiem liczb dodatnich mniejszych od c zbieżnym do 0.

Zadanie 3. Oblicz

$$\int_D y e^x d\lambda,$$

gdzie D trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$.

Zadanie 4. Wyznacz całkę

$$\int_D \frac{1}{x} + y d\lambda,$$

gdzie D to obszar ograniczony krzywymi $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 4$.

Zadanie 5. Niech $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi takimi, że

$$\int_0^1 |f_n(x) - f| dx \rightarrow 0.$$

Pokaż, że jeśli f_n nie jest zbieżny do f , to funkcje f_n osiągają wartości dowolnie duże co do modułu (tzn. zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n[0, 1]$ nie jest ograniczony).