

Zadania z Analizy Matematycznej II — seria V

14 grudnia 2018

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać najpóźniej na zajęciach 21 grudnia.

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 oraz dla dowolnego punktu spełnione jest równanie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Udowodnij, że jeśli druga różniczka f jest w punkcie p nieosobliwa (wyznacznik jest różny od zera), to f nie ma w tym punkcie ekstremum.

Zadanie 2. Udowodnij, że stożek $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z, z \in (0, 1)\}$ oraz kula $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ są dyfeomorficzne.

Zadanie 3. Niech $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją wielomianową, w której występują jednomiany różnych stopni taką że $F(x, y) = F(y, x)$ i niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$. Udowodnij, że A nie jest rozmaitością.

Wyjaśnienie: stopień jednomianu to suma stopni występujących w nim wyrazów. Wskazówka: udowodnij, że A jest symetryczny względem prostej $x = y$

Zadanie 4. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = xe^{-x^2-y^2-z^2}$ na paraboloidzie P o równaniu $x^2 + y^2 = z$.

Zadanie 5. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x+y+z$ na krzywej danej układem równań:

$$\begin{aligned}x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 6 \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 &= 6.\end{aligned}$$