

Zadania z Analizy Matematycznej II — seria VI

12 stycznia 2019

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy zostawić w mojej skrzynce najpóźniej w środę 16 stycznia o 14.

Zadanie 1. Wyznacz ekstrema funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ na zbiorze $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1\}$.

Zadanie 2. Wyznacz ekstrema funkcji $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = y + z$ na zbiorze $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x\}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$ ma dodatnią i skończoną miarę Lebesgue'a. Udowodnij, że istnieją mierzalne $B, C \subset A$ takie, że $\lambda(B) = \lambda(C) = \frac{\lambda(A)}{2}$ oraz $A = B \cup C$.

Zadanie 4. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie mierzalnym podzbiorem. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem:

$$f(x) = \lambda(A \cap B(x, 1)).$$

Wykaż, że f jest ciągła. ($B(x, 1)$ oznacza kulę otwartą o środku x i promieniu 1.)

Zadanie 5. Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolnym ciągiem funkcji. Udowodnij, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \text{ jest zbieżny}\}$ jest borelowski.