

Zadania domowe z Analizy Matematycznej

II — seria II

2 listopada 2018

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Spisane rozwiązania zadań należy zostawić w mojej skrzynce przy sekretariacie do wtorku 13 listopada.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $(0, 0)$. Niech $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem $v(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Definiujemy funkcję $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$g(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial v(\alpha)}(0, 0).$$

Udowodnij, że g jest ciągła. Podaj przykład funkcji f nieróżniczkowalnej w $(0, 0)$, która jest ciągła, ma w $(0, 0)$ wszystkie pochodne cząstkowe, i dla której funkcja g zdefiniowana jak wyżej jest ciągła.

Zadanie 2. Wyznacz ekstrema funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = 2x^2 + x + y^2$ na zbiorze $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Zadanie 3. Wyznacz odległość pomiędzy okręgiem S leżącym na płaszczyźnie $(1, 0, 0) + \text{lin}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ o środku $(1, 0, 0)$ i promieniu $\sqrt{2}$ a prostą $\ell = \{(t, 0, 4t - 2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, niech $p \in \mathbb{R}^3$ i niech $q \in W_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = z\}$ będzie takim punktem, dla którego długość $\|p - q\|$ jest minimalna.

Udowodnij, że wektor $(p - q)$ jest prostopadły do wektorów $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(q))$ oraz $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(q))$, czyli jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do wykresu.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)^2 \leq M.$$

Wykaż, że $f[B(0, 1)] \subseteq B(0, M)$.