

Zadania na z Analizy Matematycznej II — seria IV

3 grudnia 2018

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać najpóźniej na zajęciach 10 grudnia.

Zadanie 1. Udowodnij, że w otoczeniu punktu $(0, 0, 0, 0)$ układ równań

$$\begin{aligned} ye^x + se^t &= 0 \\ te^y + xe^s &= 0 \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnych t, s . Wyznacz różniczkę funkcji $(x(s, t), y(s, t))$.

Zadanie 2. Ustal, czy w otoczeniu punktu $(1, 0, 0)$ równanie

$$e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} = 3$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnych x, y . Wyznacz wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $z(x, y)$ w punkcie $(1, 0)$. Czy powyższe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnych (x, y) w otoczeniu punktu $(0, 0, 0)$?

Zadanie 3. Udowodnij, że zbiór $M \subset \mathbb{R}^4$ rozwiązań układu równań

$$\begin{aligned} xe^y + ze^w &= 0 \\ ye^z - we^x &= 0 \end{aligned}$$

jest rozmaitością.

Zadanie 4. Udowodnij, że zbiór

$$M = \{4v(t) + \alpha v(t) \sin t + \alpha(0, 0, 1) \cos t \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, \alpha \in (-1, 1)\}$$

gdzie $v(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, jest rozmaitością.

Zadanie 5. Załóżmy, że $M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, gdzie F jest klasy C^1 , jest zwartą rozmaitością. Udowodnij, że $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ dla pewnego i .