

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

3 grudnia 2018

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwa razy różniczkowalna i w każdym punkcie spełnia równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Udowodnij, że jeśli $D^2 f$ jest niezdegenerowana w punkcie p (czyli wyznacznik jest niezerowy), to f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego.

Zadanie 2. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 takiej, że $f(p) = 0$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) = 0,$$

dla której istnieje funkcja $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t. że dla dowolnych $x_1, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_n, Y(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Zadanie 3. Zbadaj, czy układ równań

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ yz &= \sin \pi x \end{aligned}$$

ma w otoczeniu punktu $(0, 1, 0)$ dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego x . Wyznacz różniczkę funkcji $(y(x), z(x))$ w punkcie $x = 0$.

Zadanie 4. Usowodnij, że powierzchnia powstała przez obrót elipsy $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3(x-2)^2 + y^2 = 3, z = 0\}$ wokół osi OY jest rozmaitością.

Zadanie 5. Czy suma dwóch rozmaitości tego samego wymiaru jest rozmaitością? Czy przecięcie dwóch rozmaitości jest rozmaitością?

Zadanie 6. Udowodnij, że zbiór macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozmaitością.

Zadanie 7. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozmaitością.