

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

28 grudnia 2018

Zadanie* 1. Udowodnij, że zbiór macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozma-
itością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie* 2. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku
1 jest rozmaitością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Miarą **skończenie addytywną** na ciele zbiorów $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ taką, że dla dowolnej rodziny zbiorów parami rozłącznych $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzi równość

$$\mu\left(\bigcup_{i \leq n} A_i\right) = \sum_{i \leq n} \mu(A_i).$$

(W szczególności, miara skończenie addytywna nie musi być miarą).

Zadanie 3. Niech A będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Udowodnij,
że na $\mathcal{P}(A)$ istnieje miara skończenie addytywna taka, że wszystkie singletony
mają miarę 0.

Zadanie 4. Załóżmy, że $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ są dwoma σ -ciałami zbiorów i $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ za-
chowuje przeliczalne operacje boole'owskie, czyli

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(A_n) \\ F\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F(A_n) \\ F(A \setminus B) &= F(A) \setminus F(B) \\ F(\emptyset) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ jest σ -ciałem generowanym przez rodzinę $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$,
to $F[\mathcal{F}_0]$ jest σ -ciałem generowanym przez rodzinę $F[\mathcal{A}]$.

Zadanie 5. Udowodnij, że produkt zbiorów borelowskich jest zbiorem borelowskim.

Od tej pory „miara” oznacza miarę Lebesgue’a i wszystkie pojęcia odnoszące się do miary odnoszą się do tej właśnie miary.

Zadanie 6. Definiujemy ciąg zbiorów $I_n \subset [0, 1]$. W następujący sposób:

$$I_n = \bigcup_{k \leq 3^n - 1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

Definiujemy $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ (C to standardowy zbiór Cantora).

Udowodnij, że C jest mierzalny i $\lambda(C) = 0$.

Zadanie 7. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym. Udowodnij, że dla dowolnego ϵ istnieje kostka $K \subset \mathbb{R}^n$ taka, że

$$\frac{\mu(K \cap A)}{\mu(K)} \geq 1 - \epsilon.$$

Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}$ jest **silnie miary zero**, jeśli dla dowolnego ciągu ϵ_n liczb dodatnich istnieje rodzina odcinków I_n taka, że $\lambda(I_n) < \epsilon_n$ oraz $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Zadanie 8. Udowodnij, że istnieją podzbiory $A \subset \mathbb{R}$, które są miary zero, ale nie są silnie miary zero.

Zadanie 9. Definiujemy ciąg zbiorów $I_n \subset [0, 1]$. W następujący sposób:

$$I_n = \bigcup_{k \leq 3^n - 1} \left(\frac{3k+1+\frac{1}{4}}{3^{n+1}}, \frac{3k+2-\frac{1}{4}}{3^{n+1}} \right).$$

Definiujemy $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Udowodnij, że C jest homeomorficzny ze standardowym zbiorem Cantora, ale $\lambda(C) > 0$.

Zadanie 10. Udowodnij, że istnieją rozłączne zbiory $M, N \subset \mathbb{R}$ takie, że M jest miary 0, N jest pierwszej kategorii Baire’a, i zachodzi równość $\mathbb{R} = M \cup N$.

Zadanie 11. Wskaż, przykład zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n$, którego brzeg ma miarę różną od 0.

Zadanie 12. Udowodnij, że istnieje gęsty nieprzeliczalny podzbiór $\mathbb{R}$, który ma miarę 0.