

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

29 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 5 i 9 listopada. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

W poniższych zadaniach utożsamiamy $\mathbb{R}^{2n}$ z przestrzenią liniową macierzy wymiaru $n \times n$.

Zadanie 1. Czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest klasy C^1 ?

Zadanie 2. Niech $M \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważamy wyznacznik $\det$ jako funkcję z $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\frac{\partial \det}{\partial M}(I) = \text{tr} M,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 3. Udowodnij, że $\nabla \det(M) = ((-1)^{i+j} M_{ij})_{i,j=1}^n$, gdzie $M_{i,j}$ jest minorem macierzy M .

Zadanie 4. Wyznacz maksymalne możliwe pole trapezu wpisanego w koło o promieniu 1.

Zadanie 5. Niech $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}^n$ będą dwoma wektorami o normie 1 i niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Udowodnij, że jeśli $\frac{\partial f}{\partial v_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial v_2}(p)$, to $\|\nabla f\|(p) > 1$.

Zadanie 6. Podaj przykład $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ciągłej, która nie jest gradientem żadnej funkcji $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (tzn. $f \neq \nabla g$ dla dowolnej g).

Zadanie 7. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^n$ $\|\nabla f(p)\| \geq 1$. Niech $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie taką krzywą, że $(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}) = \text{grad} f(\gamma(t))$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego M dla dostatecznie dużych t

$$\|\gamma(t)\| \geq M.$$