

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

26 listopada 2018

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równość

$$f(x_1, \dots, x_n) = \|(x_1, \dots, x_n)\|^k R(x_1, \dots, x_n),$$

gdzie $R(p) \rightarrow 0$, gdy $p \rightarrow 0$. Udowodnij, że wówczas istnieje funkcja $R' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t. że

$$x_1 f(x_1, \dots, x_n) = \|(x_1, \dots, x_n)\|^{k+1} R'(x_1, \dots, x_n)$$

oraz $R'(p) \rightarrow 0$ dla $p \rightarrow 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwa razy różniczkowalna i w każdym punkcie spełnia równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Udowodnij, że jeśli $D^2 f$ jest niezdegenerowana w punkcie p (czyli wyznacznik jest niezerowy), to f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego.

Zadanie 3. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1 takiej, że $Df(p) = 0$, ale f jest odwracalna w pewnym otoczeniu V punktu $f(p)$. Udowodnij, że $f^{-1} \upharpoonright V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ nie jest klasy C^1 .

Zadanie 4. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 takiej, że $f(p) = 0$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) = 0,$$

dla której istnieje funkcja $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t. że dla dowolnych $x_1, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_n, Y(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że nie istnieje bijekcja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^1 t. że f^{-1} jest klasy C^1 .