

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

26 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 29 października. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{-1}{|x|+|y|}}}{x^2+y^2} & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{y} & , \text{jeśli } y \neq 0 \\ x & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W poniższych zadaniach utożsamiamy $\mathbb{R}^{2n}$ z przestrzenią liniową macierzy wymiaru $n \times n$.

Zadanie 4. Niech $M \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważamy wyznacznik $\det$ jako funkcję z $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\frac{\partial \det}{\partial M} = \text{tr} M.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że $\nabla \det(M) = ((-1)^{i+j} M_{ij})_{i,j=1}^n$, gdzie $M_{i,j}$ jest minorem macierzy M .

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = ax + by + c$. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem domkniętym. Udowodnij, że kresy funkcji f na trójkącie ABC są osiągane na wierzchołkach trójkąta.

Zadanie 7. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = xyz$ na kuli domkniętej $\overline{B(0, 1)}$.

Zadanie 8. Wykaż, że nie istnieje funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia w każdym punkcie warunek:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

Zadanie 9. Załóżmy, że $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Załóżmy, że w każdym punkcie (x, y) spełnione jest równanie:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wykaż, że istnieje taka funkcja $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, że $f(x, y) = g(\frac{x}{y})$.

Zadanie 10. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^n$ $\|\nabla f\|(p) \geq 1$. Niech $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie taką krzywą, że $(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}) = \text{grad} f(\gamma(t))$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego M dla dostatecznie dużych t

$$\|\gamma(t)\| \geq M.$$