

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

23 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 26 i 30 listopada. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że dla dowolnej prostej ℓ przechodzącej przez $(0, 0)$ funkcja $f \upharpoonright \ell$ ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$. Udowodnij, że f ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$.

Zadanie 2. Zbadaj, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

ma ekstrema lokalne.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, która w każdym punkcie spełnia równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Udowodnij, że jeśli $D^2 f$ jest niezdegenerowana w punkcie p , to f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego.

Zadanie 4. Ustal, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = e^{xy + \sin(x+y)} + x \sin(xy)$$

ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 5. Ustal, w jakich punktach y można wyznaczyć jako funkcję uwikłaną zmiennej x zadaną równaniem:

$$xe^y + ye^x = 0.$$

Wyznacz pochodną tej funkcji ze względu na x w punkcie $x = 0$.

Zadanie 6. Udowodnij, że w pewnym otoczeniu punktu $(0, 1, 0)$ układ równań

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$yz = \sin \pi x$$

ma dla dowolnej wartości x dokładnie jedno rozwiązanie.