

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

22 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 26 i 29 października. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{-1}{|x|+|y|}}}{x^2+y^2} & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} (|x| + |y|) \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{y} & , \text{jeśli } y \neq 0 \\ x & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 5. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Zadanie 6. Wyznacz odległość między paraboloidą o równaniu $z = x^2 + y^2$, a punktem $(0, 1, 0)$.

Zadanie 7. Niech $K \subset \mathbb{R}^2$ będzie czworobokiem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$. Wyznacz maksimum funkcji $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = x^2 - xy + 2y$.

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = ax + by + c$. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem domkniętym. Udowodnij, że kresy funkcji f na trójkącie ABC są osiągane na wierzchołkach trójkąta.

Zadanie 9. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, która spełnia w każdym punkcie warunek:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wykaż, że f jest funkcją stałą.