

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

20 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 19 listopada. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

W poniższych zadaniach utożsamiamy $\mathbb{R}^{2n}$ z przestrzenią liniową macierzy wymiaru $n \times n$.

Zadanie 1. Niech $M \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważamy wyznacznik $\det$ jako funkcję z $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\frac{\partial \det}{\partial M}(I) = \operatorname{tr} M,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\nabla \det(M) = ((-1)^{i+j} M_{ij})_{i,j=1}^n$, gdzie $M_{i,j}$ jest minorem macierzy M .

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że dla dowolnej prostej ℓ przechodzącej przez $(0, 0)$ funkcja $f \upharpoonright \ell$ ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$. Udowodnij, że f ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$.

Zadanie 4. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej dla której pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ istnieją dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i istnieją $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, ale te drugie pochodne nie są sobie równe.

Zadanie 5. Zbadaj, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

ma ekstrema lokalne.

Zadanie 6. Zbadaj, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + y^2)$$

ma ekstrema lokalne.

Zadanie 7. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, która w każdym punkcie spełnia równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Udowodnij, że jeśli $D^2 f$ jest niezdegenerowana w punkcie p , to f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego.