

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

17 grudnia 2018

Zadanie 1. Niech $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ będzie rozmaitością wymiaru k . Udowodnij, że dla dowolnego punktu p istnieje takie otoczenie $U \ni p$, że $M \cap U$ jest postaci $\{q \in U \mid F(q) = 0\}$, gdzie $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem klasy C^1 takim, że rząd różniczki wynosi k w każdym punkcie $q \in U$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością, a $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem, to $F[M]$ jest rozmaitością.

Zadanie 3. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością zwartą wymiaru k i niech $H \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną hiperpowierzchnią wymiaru k . Wykaż, że istnieją co najmniej dwa punkty p, p' , dla których zachodzą równości

$$\begin{aligned}T_p M &= p + H \\T_{p'} M &= p' + H.\end{aligned}$$

Zadanie 4. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozmaitością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie 5. Udowodnij, że mnożenie i odraćanie macierzy są różniczkowalne (jako odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).