

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

19 stycznia 2019

Zadanie* 1. Udowodnij, że zbiór macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozma-
itością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie* 2. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku
1 jest rozmaitością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie 3. Udowodnij, że jeśli X ma miarę dodatnią, to X ma podzbiór nie-
mierzalny.

Zadanie 4. Udowodnij, że istnieje zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}$ i funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f[A]$ jest niemierzalny.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią, to A ma moc continuum.

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie
odcinkiem domniętym. Wykaż, że

$$\frac{d}{da} \int_I f(a, x) dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) dx.$$