

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

16 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 19 listopada. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu za zgłoszone zadania można uzyskać maksymalnie 3 punkty. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

W poniższych zadaniach utożsamiamy $\mathbb{R}^{2n}$ z przestrzenią liniową macierzy wymiaru $n \times n$.

Zadanie 1. Niech $M \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważamy wyznacznik $\det$ jako funkcję z $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\frac{\partial \det}{\partial M}(I) = \text{tr} M,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\nabla \det(M) = ((-1)^{i+j} M_{ij})_{i,j=1}^n$, gdzie $M_{i,j}$ jest minorem macierzy M .

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3).$$

Udowodnij, że $f \upharpoonright \ell$ ma ekstremum lokalne w $(0, 0)$ dla dowolnej prostej ℓ przechodzącej przez $(0, 0)$, ale f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że dla dowolnego ℓ funkcja $f \upharpoonright \ell$ ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$. Udowodnij, że f ma minimum globalne w pewnym punkcie $p \in B(0, 1)$.

Zadanie 5. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej dla której pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ istnieją dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i istnieją $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, ale te drugie pochodne nie są sobie równe.