

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

16 stycznia 2019

Zadanie* 1. Udowodnij, że zbiór macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozma-
itością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie* 2. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku
1 jest rozmaitością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie 3. Wykaż, że produkt zbiorów miary 0 ma miarę 0.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli X ma miarę dodatnią, to X ma podzbiór nie-
mierzalny.

Zadanie 5. Udowodnij, że istnieje zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}$ i funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f[A]$ jest niemierzalny.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią, to A ma moc continuum.

Zadanie 7. Załóżmy, że $f_n \rightarrow f$, gdzie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę skończoną.
Wykaż, że dla dowolnych ϵ_1, ϵ_2 istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ zbiór

$$\{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon_1\}$$

ma miarę nie większą niż ϵ_2 .

Zadanie 8. Wykaż, że implikacja z powyższego zadania nie odwraca się.