

Zadania na ćwiczenia z Analizy Matematycznej II

11 stycznia 2019

Zadanie* 1. Udowodnij, że zbiór macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1 jest rozma-
itością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Zadanie* 2. Udowodnij, że zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$ o wyznaczniku
1 jest rozmaitością (jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$).

Udowodnij, że mnożenie i odwracanie macierzy są różniczkowalne (jako
odwzorowania z $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ lub z $\mathbb{R}^{n^2}$ do $\mathbb{R}^{n^2}$).

Miarą **skończenie addytywną** na ciele zbiorów $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ taką, że dla dowolnej rodziny zbiorów parami rozłącznych $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzi równość

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

(W szczególności, miara skończenie addytywna nie musi być miarą).

Zadanie 3. Niech A będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Udowodnij, że na $\mathcal{P}(A)$ istnieje miara skończenie addytywna taka, że wszystkie singletony mają miarę 0, zaś A ma miarę dodatnią.

Zadanie 4. Udowodnij, że produkt zbiorów borelowskich jest zbiorem borelowskim.

Od tej pory „miara” oznacza miarę Lebesgue’a i wszystkie pojęcia odnoszące się do miary odnoszą się do tej właśnie miary.

Zadanie 5. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym. Udowodnij, że dla dowolnego ϵ istnieje $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że K jest niezdegenerowanym n -wymiarowym równoległościanem i

$$\frac{\mu(K \cap A)}{\mu(K)} \geq 1 - \epsilon.$$

Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}$ jest **silnie miary zero**, jeśli dla dowolnego ciągu ϵ_n liczb dodatnich istnieje rodzina odcinków I_n taka, że $\lambda(I_n) < \epsilon_n$ oraz $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieją podzbiory $A \subset \mathbb{R}$, które są miary zero, ale nie są silnie miary zero.

Zadanie 7. Udowodnij, że istnieje gęsty nieprzeliczalny podzbiór $\mathbb{R}$, który ma miarę 0.

Zadanie 8. Pokaż, że okrąg $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ma miarę 0.

Zadanie 9. Niech $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = y\}$, gdzie f jest funkcją ciągłą. Wykaż, że W ma miarę 0.

Zadanie 10. Wykaż, że produkt zbiorów miary 0 ma miarę 0.

Zadanie 11. Udowodnij, że jeśli X ma miarę dodatnią, to X ma podzbiór niemierzalny.

Zadanie 12. Udowodnij, że istnieje zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}$ i funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f[A]$ jest niemierzalny.

Zadanie 13. Wykaż, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią, to A ma moc continuum.