

Zadania z Analizy Matematycznej II.1

8 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 12 i 15 X 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. Za rozwiązanie poniższych zadań można uzyskać maksymalnie trzy punkty na tydzień (czyli należy zadeklarować rozwiązanie co najwyżej trzech zadań). Rozwiązanie zadania z gwiazdką podnosi ogólną ocenę z ćwiczeń o dziesięć punktów procentowych.

Zadanie* 1. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg punktów $x_i \in \mathbb{R}^n$ o nieskończenie wielu wyrazach zbieżny do punktu x , dla którego $f(x_i) \rightarrow f(x)$.

Zadanie 2. Zbadaj, czy następująca granica istnieje (i ewentualnie ją wyznacz):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2y + y^2x}$$

Zadanie 3. Zbadaj, czy następująca granica istnieje (i ewentualnie ją wyznacz):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{xy}} - 1}{e^y - \cos x}$$

Zadanie 4. Zbadaj, czy następująca granica istnieje (i ewentualnie ją wyznacz):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (e^{x^2+y^2} - 1).$$

Zadanie 5. Zbadaj, czy następująca granica istnieje (i ewentualnie ją wyznacz):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{xy}} \ln(x^2 + y^2).$$

Zadanie 6. Zbadaj, czy następująca granica istnieje (i ewentualnie ją wyznacz):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(|x+y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe są funkcje $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorami:

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x, \gamma(x)) \\h(x) &= f(\gamma(x), x).\end{aligned}$$

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że dla dowolnej prostej ℓ równoległej do osi OX lub do osi OY , funkcja $f \upharpoonright \ell$ jest ciągła. Czy wynika stąd, że f jest ciągła?