

# Zadania na ćwiczenia z Analizy I

16 października 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej II. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

**Zadanie 1.** Udowodnij, że funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcje  $g, h$  zdefiniowane wzorami

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x, \gamma(x)) \\ h(x) &= f(\gamma(x), x).\end{aligned}$$

Mówimy, że  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest **kawałkami afiniczna**, jeśli istnieją  $a_1 < \dots < a_n$  takie, że  $f \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$  oraz  $f \upharpoonright [-\infty, a_1], f \upharpoonright [a_n, \infty]$  są na tych odcinkach równe funkcji afinicznej.

**Zadanie 2.** Niech  $I_1, \dots, I_n$  będą odcinkami zawartymi w  $\mathbb{R}^n$ . Udowodnij, że dla dowolnych punktów  $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_n)$  istnieje funkcja kawałkami afiniczna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  taka, że  $a, b \in f[\mathbb{R}]$ , ale  $f[\mathbb{R}] \cap (I_1 \cup \dots \cup I_n) = \emptyset$ .

**Zadanie 3.** Wskaż przykład ciągłej iniekcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , której funkcja odwrotna nigdzie nie jest ciągła. Czy takie zjawisko może zajść dla  $n = 1$ ?

Mówimy, że zbiór jest **spójny**, jeśli nie jest zawarty w dwóch rozłącznych zbiorach otwartych.

**Zadanie 4.** Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że dla dowolnego zbioru spójnego  $A \subset \mathbb{R}^n$  zbiór  $f[A]$  również jest zbiorem spójnym. Czy wynika stąd, że  $f$  jest funkcją ciągłą?

**Zadanie 5.** Zbadaj, czy funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})} & \text{jeśli } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła.

**Zadanie 6.** Zbadaj, czy funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^3 + y^2) \ln \sqrt{|xy|} & \text{jeśli } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła.

**Zadanie 7.** Zbadaj, czy funkcja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{|xyz|^{\frac{3}{2}}}{\arctan\left(\frac{1}{|x|+|y|+|z|}\right) - \frac{\pi}{2}} & \text{jeśli } x, y, z \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła.