

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

12 października 2018

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej II. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcje g, h zdefiniowane wzorami

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x, \gamma(x)) \\h(x) &= f(\gamma(x), x).\end{aligned}$$

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że dla dowolnej prostej $\ell \subset \mathbb{R}^n$ jest ciągła. Czy wynika stąd, że f jest ciągła?

Mówimy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest **kawałkami afiniczna**, jeśli istnieją $a_1 < \dots < a_n$ takie, że $f \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ oraz $f \upharpoonright [-\infty, a_1], f \upharpoonright [a_n, \infty]$ są na tych odcinkach równe funkcji afinicznej.

Zadanie 3. Niech $I_1, \dots, I_n$ będą odcinkami. Udowodnij, że dla dowolnych punktów $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_n)$ istnieje funkcja kawałkami afiniczna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $a, b \in f[\mathbb{R}]$, ale $f[\mathbb{R}] \cap (I_1 \cup \dots \cup I_n) = \emptyset$.

Zadanie 4. Wskaż przykład ciągłej iniekcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, której funkcja odwrotna nigdzie nie jest ciągła. Czy takie zjawisko może zajść dla $n = 1$?

Mówimy, że zbiór jest **spójny**, jeśli nie jest zawarty w dwóch rozłącznych zbiorach otwartych.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że dla dowolnego zbioru spójnego $A \subset \mathbb{R}^n$ zbiór $f[A]$ również jest zbiorem spójnym. Czy wynika stąd, że f jest funkcją ciągłą?

Zadanie 6. Zbadaj, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{e^{x^2+y^2} - \cos x} & \text{jeśli } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 7. Zbadaj, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{|x+y|} \sin(\sqrt{x^2+y^2}) & \text{jeśli } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła

Zadanie 8. Zbadaj, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^3 + y^2) \ln \sqrt{|xy|} & \text{jeśli } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła

Zadanie 9. Zbadaj, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xyz|^{\frac{3}{2}}}{\arctan\left(\frac{1}{|x|+|y|+|z|}\right) - \frac{\pi}{2}} & \text{jeśli } x, y, z \neq 0, \\ \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła