

Zadania z Analizy Matematycznej I.2, seria 6

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać do 24 IV.

Zadanie 1. Zbadaj, czy następujące ciągi funkcji (f_n) są zbieżne. Czy są jednostajnie zbieżne?

1. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{\cos x}{n}\right)$.
2. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin x(1 - x)^n$.

W podpunkcie drugim warto pamiętać, że znamy już sporo metod związanych z oszacowaniami i nie każde równanie trzeba rozwiązywać.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami jednostajnie ciągłymi i $f_n \Rightarrow f$. Wykaż, że f jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 3. Ustalmy ciągi liczb $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że funkcje $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są dane wzorami:

$$f_n(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + a_n e^{\alpha_n x}.$$

Udowodnij, że jeśli $f_n \Rightarrow f$, to istnieje takie α , że $|f| \leq e^{\alpha x}$.