

Zadania z Analizy Matematycznej I.2, seria 5

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać do 17 IV.

Zadanie 1. Wykaż, że zachodzą następujące nierówności:

- $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}.$
- $e^x \sin x > x + x^2 - \frac{x^4}{2}, x \in [0, 1].$

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że f jest k -krotnie różniczkowalna dla dowolnego k oraz zachodzą nierówności $f(x) \geq 1, f'(x) \geq 1!, f''(x) \geq 2!, \dots, f^{(n)}(x) \geq n!$ dla $x \geq 0$.

Czy istnieje funkcja, która spełnia powyższe założenia taka, że nierówności $f^{(n)}(x) \geq n!$ zachodzą dla wszystkich $x \geq 0$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$?