

Zadania domowe z Analizy Matematycznej I

— seria III

8 listopada 2018

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy złożyć w mojej skrzynce w sekretariacie najpóźniej w środę 21 XI o 12. W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu, ćwiczeń oraz rozpiski umieszczonej na mojej stronie. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Załóżmy, że b_n, a_n są takimi ciągami, że dla dowolnego n liczby a_n, b_n są różnych znaków (nie są obie naraz dodatnie, ujemne lub równe 0), oraz że $a_n - b_n \rightarrow 0$. Udowodnij, że $a_n \rightarrow 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną, i że $f(q_n) \rightarrow c$ dla dowolnego ciągu (q_n) o wyrazach wymiernych takiego, że $q_n \rightarrow 0$. Udowodnij, że $f(a_n) \rightarrow c$ dla dowolnego ciągu a_n dążącego do 0.

Zadanie 3. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{(2n)^2}\right).$$

Zadanie 4. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Zadanie 5. Niech $f(x) = \ln(1+x)$. Dla $x > -1$ zbadaj zbieżność i ewentualnie wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ razy}}$$

w zależności od wartości parametru x .