

Zadania z Analizy Matematycznej I

5 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 9 i 16 listopada 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty. Zadania oznaczone kółkiem powinny być łatwiejsze od reszty, a te oznaczone gwiazdką — trudniejsze.

Zadanie^o 1. Załóżmy, że $a_n \geq a$ i dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje taki ciąg b_n , że $a_n \leq b_n$ oraz $b_n \rightarrow a + \epsilon$. Udowodnij, że $a_n \rightarrow a$.

Zadanie 2. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Zadanie 3. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1^1 + 2^2 + \dots + n^n}{n^n}$$

Zadanie 4. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1 \ln(1) + 2 \ln(2) + \dots + n \ln(n)}{1 + n^2 \ln(n)}.$$

Zadanie 5. Wskaż przykład ciągu a_n takiego, że granica

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

istnieje, wyrażenia $b_n, b_{n+1} - b_n$ są różne od zera, ale granica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje.

Zadanie 6. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \left(1 + \frac{1}{\ln(n+2)}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\ln(2n)}\right).$$

Zadanie 7. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Zadanie 8. Ustal dla jakich wartości a_1 ciąg zdefiniowany warunkiem rekurencyjnym $a_{n+1} = e^{a_n - 1}$ ma granicę.

Zadanie 9. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1).$$

Zadanie 10. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{an - \lfloor an \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 11. Korzystając z zadania 3 z poprzedniej serii udowodnij, że dla dowolnego ciągu a_n o wyrazach rzeczywistych istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, która nie występuje w ciągu a_n .