

# Zadania z Analizy Matematycznej I

5 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 7 i 12 X 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. Na ćwiczeniach 7 i 12 X można zgłosić rozwiązanie co najwyżej trzech zadań. Za rozwiązanie poniższych zadań można więc uzyskać maksymalnie trzy punkty.

**Zadanie 1.** Udowodnij, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

**Zadanie 2.** Udowodnij, że dla dowolnego  $n$  istnieje taki ciąg  $(a_1, \dots, a_k)$  o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1\}$ , że:

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_k 2^k.$$

W tym zadaniu pokazujemy, że każda liczba naturalna ma zapis dwójkowy. Nie wolno powoływać się na ten dowodzony właśnie fakt.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla dowolnego  $n \geq 1000$  zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq \sqrt[3]{n}.$$

Nie trzeba sprawdzać, czy nierównowność zachodzi dla  $n = 1000$ .

**Zadanie 4.** Niech  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą. Udowodnij, że  $p_n \geq 3n$  dla dowolnego  $n \geq 12$ . Dla ułatwienia:  $p_{12} = 37$ .

**Zadanie 5.** Udowodnij, że zachodzi następująca nierówność dla dowolnych  $a_1, \dots, a_n > 0$ :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

**Zadanie 6.** Udowodnij, że dla dowolnych  $a, b, c > 0$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3.$$

**Zadanie 7.** Udowodnij, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \geq n^{-\frac{2}{3}}.$$