

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

28 grudnia 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej 7 i 11 stycznia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty. Za rozwiązanie zadań z gwiazdką podnoszę końcową ocenę z ćwiczeń o dziesięć punktów procentowych.

Zadanie* 1. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że dla dowolnego odcinka otwartego I funkcja $f \upharpoonright I : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest na $\mathbb{R}$.

Zadanie* 2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie zbieżna do nieskończoności.

Zadanie* 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg a_n liczb rzeczywistych zbieżny do a taki, że jego wyrazy się nie powtarzają i $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Zadanie 4. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Wyznacz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}}{x}.$$

Zadanie° 5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zbadaj, w jakich punktach f jest ciągła.

Zadanie° 6. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zbadaj, czy f jest ciągła.

Zadanie 7. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Udowodnij, że f nie jest ciągła, ale ma własność Darboux.

Zadanie 8. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij, że istnieje taki punkt, dla którego $f(x) = x$.

Zadanie 9. Udowodnij, że równanie $e^x = \sqrt{x}$ ma rozwiązanie.

Zadanie 10. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Załóżmy, że $f(0) = 0$, $f(4) = 4$. Udowodnij, że dla pewnego x zachodzi równość $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Zadanie 11. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Załóżmy, że $f(0) = 1$, $f(5) = 2019$. Udowodnij, że dla pewnego x zachodzi równość $f(2x) = 4f(x)$.