

Zadania z Analizy Matematycznej I

29 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 5 i 9 listopada 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty. Zadania oznaczone kółkiem powinny być łatwiejsze od reszty, a te oznaczone gwiazdką — trudniejsze.

Zadanie° 1. Niech $k \in \mathbb{N}$ wyznaczyć granicę ciągu $a_n = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$.

Zadanie° 2. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{n}}}}{n}.$$

Zadanie° 3. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

Zadanie° 4. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+k)^n}{n^n}$.

Zadanie 5. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1).$$

Zadanie 6. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Zadanie 7. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}.$$

Zadanie 8. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}{n \ln n}.$$

Zadanie 9. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Zadanie 10. Ustal dla jakich wartości a_1 ciąg zdefiniowany warunkiem rekurencyjnym $a_{n+1} = e^{a_n - 1}$ ma granicę.

Zadanie 11. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{an - \lfloor an \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 12. Korzystając z zadania 3 z poprzedniej serii udowodnij, że dla dowolnego ciągu a_n o wyrazach rzeczywistych istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, która nie występuje w ciągu a_n .