

Zadania z Analizy Matematycznej I

26 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 29 października i 5 listopada 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty. Zadania oznaczone kółkiem powinny być łatwiejsze od reszty, a te oznaczone gwiazdką — trudniejsze.

Uwaga: w niektórych zadaniach poniżej przyda się nierówność $e^x \geq 1 + x$, która została udowodniona na wykładzie lub zostanie udowodniona wkrótce.

Zadanie 1. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = L.$$

Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zadanie 2. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zadanie^o 3. Niech $k \in \mathbb{N}$ wyznacz granicę ciągu $a_n = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0.$$

Zadanie^o 5. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Zadanie 6. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Zadanie^o 7. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{n}}}}{n}.$$

Zadanie^o 8. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

Zadanie^o 9. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+k)^n}{n^n}$.

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność ciągu o wyrazach $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$.

Zadanie 11. Ustal dla jakich wartości a_1 ciąg zdefiniowany warunkiem rekurencyjnym $a_{n+1} = e^{a_n-1}$ ma granicę.

Zadanie 12. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{an - \lfloor an \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 13. Korzystając z zadania 3 z poprzedniej serii udowodnij, że dla dowolnego ciągu a_n o wyrazach rzeczywistych istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, która nie występuje w ciągu a_n .