

Zadania z Analizy Matematycznej I

23 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 26 i 30 listopada 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Można też powoływać się na elementarne fakty dotyczące funkcji trygonometrycznych znane z liceum. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty. Zadania oznaczone kółkiem powinny być łatwiejsze od reszty, a te oznaczone gwiazdką — trudniejsze.

Zadanie 1. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że dla dowolnego ciągu b_n

$$\limsup a_n + b_n = \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Udowodnij, że a_n jest zbieżny.

Zadanie 2. Niech $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Udowodnij, że zbiór

$$\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

zawiera dowolnie małe wyrazy dodatnie.

Zadanie 3. Wyznacz $\limsup$ i $\liminf$ ciągu $a_n = \sin(n)$.

Zadanie^o 4. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{\ln n}$ jest zbieżny?

Zadanie^o 5. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n!}{n^n}$ jest zbieżny?

Zadanie^o 6. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n^5 + 7n^9}{3^n + 2^n}$ jest zbieżny?

Zadanie^o 7. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n^{2018} + n^2 \sin(n)}{1138n^{1918}}$ jest zbieżny?

Zadanie^o 8. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$ jest zbieżny?

Zadanie 9. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{\binom{n}{k}}$ jest zbieżny?

Zadanie 10. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$ jest zbieżny? Uwaga: $\ln^2(n)$ oznacza $(\ln(n))^2$. Jest to zwyczajowo używana notacja.