Zadania z Analizy Matematycznej I

22 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 26 i 29 X 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty.

Zadanie 1. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = L.$$

Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zadanie 2. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zadanie 3. Niech $k \in \mathbb{N}$ wyznacz granicę ciągu $a_n = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0.$$

Zadanie 5. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Zadanie 6. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Zadanie 7. Wyznacz granicę ciągu

$$\sqrt[n]{3^n + 5^n \sin(n) + 6^n}.$$

Zadanie 8. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n + 2018} - \cos(n)\sqrt[5]{n^3 + 10}}{\sqrt{n^3 + 2n^2}}.$$

Zadanie 9. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + 2^n}{3^n + 2018}.$$

Zadanie 10. Wyznacz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{n}}}}{n}.$$

Zadanie 11. Wyznacz granicę ciągu a_n zdefiniowanego warunkiem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_{n+1} &= \sqrt{2+a_n}. \end{aligned}$$

Zadanie 12. Wyznacz granicę ciągu a_n zdefiniowanego warunkiem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4 \\ a_{n+1} &= \sqrt{\frac{2}{3}a_n + 3}. \end{aligned}$$

Zadanie 13. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{an - \llcorner an \lrcorner \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 14. Korzystając z zadania 3 z poprzedniej serii udowodnij, że dla dowolnego ciągu a_n o wyrazach rzeczywistych istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, która nie występuje w ciągu a_n.