

Zadania z Analizy Matematycznej I

19 listopada 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 23 i 26 listopada 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Można też powoływać się na elementarne fakty dotyczące funkcji trygonometrycznych znane z liceum. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty. Zadania oznaczone kółkiem powinny być łatwiejsze od reszty, a te oznaczone gwiazdką — trudniejsze.

Zadanie 1. Ustalmy dowolny ciąg a_n . Niech C będzie zbiorem tych $x \in \mathbb{R}$, że a_n ma podciąg b_n zbieżny do x . Niech $c_n \rightarrow c$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym takim, że $c_n \in C$ dla dowolnego n . Udowodnij, że $c \in C$.

Zadanie 2. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że dla dowolnego ciągu b_n

$$\limsup a_n + b_n = \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Udowodnij, że a_n jest zbieżny.

Zadanie 3. Podaj przykład takiego ciągu a_n , że

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n+m} \neq \liminf_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+m}$$

Zadanie^o 4. Wyznacz $\limsup$ i $\liminf$ ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

Zadanie^o 5. Wyznacz $\limsup$ i $\liminf$ ciągu

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Zadanie^o 6. Wyznacz $\limsup$ i $\liminf$ ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$$

Zadanie* 7. Niech $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Udowodnij, że zbiór

$$\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 8. Wyznacz $\limsup$ i $\liminf$ ciągu $a_n = \sin(n)$.