

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

19 października 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej I. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Wyznacz kresy zbioru $\{\frac{n+k}{k+l} \mid k < n < l \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 2. Wyznacz kresy zbioru $\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $\{I_n \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest taką rodziną odcinków domkniętych, że dla dowolnego n $I_{n+1} \subseteq I_n$. Udowodnij, że przecięcie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ jest niepuste.

Zadanie 4. Załóżmy, że $a \notin \mathbb{Q}$. Udowodnij, że zbiór

$$\{an - \lfloor an \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 5. Załóżmy, że a_n jest zbieżny. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest zbieżny do 0.

Zadanie 6. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Zadanie 7. Udowodnij, że dla dowolnego k naturalnego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$.

Zadanie 8. Zbadaj granicę ciągu $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$.

Zadanie 9. Korzystając z zadania 3 wykaż, że dla dowolnego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych istnieje liczba, która nie występuje w tym ciągu.

W zadaniu tym nie należy powoływać się na fakty spoza zajęć z analizy, których dowodu nie potrafilibyśmy przedstawić.