

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

17 grudnia 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej 17 i 21 grudnia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty. Za rozwiązanie zadań z gwiazdką podnoszę końcową ocenę z ćwiczeń o dziesięć punktów procentowych.

Zadanie* 1. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że dla dowolnego odcinka otwartego I funkcja $f \upharpoonright I : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest na $\mathbb{R}$.

Zadanie* 2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie zbieżna do nieskończoności.

Zadanie* 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg a_n liczb rzeczywistych zbieżny do a taki, że $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zbadaj, w jakich punktach f jest ciągła.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|q|}, & \text{jeśli } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{N}_+ \text{ nie mają wspólnych dzielników pierwszych.} \\ 0, & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zbadaj, w jakich punktach g jest ciągła.

Zadanie° 6. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^3) - 2 \sin^2 x}{\sqrt{x} + 3 \cos x}.$$

Zadanie° 7. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{e^x - 1 + x}.$$

Zadanie 8. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Wyznacz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}}{x}.$$