

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

16 stycznia 2019

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej 11 i 18 i 21 stycznia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty. Za rozwiązanie zadań z gwiazdką podnoszę końcową ocenę z ćwiczeń o dziesięć punktów procentowych.

Zadanie* 1. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że dla dowolnego odcinka otwartego I funkcja $f \upharpoonright I : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest na $\mathbb{R}$.

Zadanie* 2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie zbieżna do nieskończoności.

Zadanie* 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg a_n liczb rzeczywistych zbieżny do a taki, że jego wyrazy się nie powtarzają i $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Zadanie 4. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x}.$$

Zadanie° 5. Załóżmy, że funkcja ciągła $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę $L \in \mathbb{R}$ w $+\infty$. Udowodnij, że f jest ograniczona.

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że f jest nieograniczona z góry ani z dołu, ale nie dąży w $+\infty$ do $\pm\infty$. Wykaż, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ funkcja f przyjmuje wartość a nieskończenie wiele razy.

Zadanie° 7. Wykaż, że zbiór $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ jest zwarty.

Zadanie 8. Wykaż, że obraz zbioru zwartego przy funkcji ciągłej jest zwarty.

Zadanie 9. Wykaż, że suma dwóch zbiorów domkniętych jest domknięta.

Zadanie° 10. Wykaż, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 11. Wykaż, że $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła.