

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

14 grudnia 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej 17 i 21 grudnia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie* 1. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że dla dowolnego odcinka otwartego I funkcja $f \upharpoonright I : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest na $\mathbb{R}$.

Zadanie* 2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie zbieżna do nieskończoności.

Zadanie* 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg a_n liczb rzeczywistych zbieżny do a taki, że $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wykaż, że f nie ma granicy w żadnym punkcie.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zbadaj, w jakich punktach f ma granicę.

Zadanie° 6. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sin x$ nie ma granicy w $+\infty$.

Zadanie° 7. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Zadanie° 8. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{e^x - 1 + x}.$$

Zadanie 9. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Wyznacz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}}{x}.$$

Zadanie 10. Wskaż parę szeregów rozbieżnych, których iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny.

Zadanie 11. Udowodnij, że jeśli a_n, b_n są szeregami o wyrazach dodatnich i jeden z nich jest rozbieżny, to ich iloczyn Cauchy'ego jest rozbieżny.