

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

12 listopada 2018

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej I 16 i 19 listopada. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Ustal, dla jakich wartości a_n ciąg zdefiniowany warunkiem $a_{n+1} - e^{a_n} - 1$ ma granicę.

Zadanie 2. Załóżmy, że ciąg a_n ma wyrazy nieujemne, $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ oraz $a_{n+1}a_n$ jest zbieżny. Wykaż, że a_n jest zbieżny.

Zadanie 3. Załóżmy, że $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ oraz a_n ma podciąg zbieżny do skończonej granicy. Czy wynika stąd, że a_n zbieżny?

Zadanie 4. Udowodnij, że każdy ciąg ma nieskończony podciąg monotoniczny.

Zadanie 5. Załóżmy, że a_n nie jest zbieżny do granicy skończonej lub nieskończonej. Wtedy a_n ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic (skończonych lub nieskończonych).

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{a_n - \lfloor a_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Zadanie* 7. Wykaż, że dla dowolnego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych istnieje liczba, która nie występuje w tym ciągu.

W zadaniu tym nie należy powoływać się na fakty spoza zajęć z analizy, których dowodu nie potrafilibyśmy przedstawić.