

Zadania z Analizy Matematycznej I

13 października 2018

Rozwiązania poniższych zadań należy zgłaszać na zajęciach 12 i 15 X 2018r.

W rozwiązaniach poniższych zadań można powoływać się na fakty z wykładu lub ćwiczeń. Każde rozwiązane zadanie pozwala uzyskać jeden punkt. W każdym tygodniu można uzyskać za rozwiązanie zadań najwyżej trzy punkty.

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnego n istnieje taki ciąg $(a_1, \dots, a_k)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, że:

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_k 2^k.$$

W tym zadaniu pokazujemy, że każda liczba naturalna ma zapis dwójkowy. Nie wolno powoływać się na ten dowodzony właśnie fakt.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 1000$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq \sqrt[3]{n}.$$

Nie trzeba sprawdzać, czy nierównowość zachodzi dla $n = 1000$.

Zadanie 3. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą. Udowodnij, że $p_n \geq 3n$ dla dowolnego $n \geq 12$. Dla ułatwienia: $p_{12} = 37$.

Zadanie 4. Udowodnij, że zachodzi następująca nierówność dla dowolnych $a_1, \dots, a_n > 0$:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3.$$

Zadanie 6. .

Zadanie 7. Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ przez $A + B$ mamy na myśli

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A, z \in B \ x = y + z\},$$

czyli zbiór sum elementów z A i B . Udowodnij, że $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Zadanie 8. Wyznacz kresy zbioru $\{\sqrt[n]{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 9. Wyznacz kresy zbioru $\{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.