

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

8 stycznia 2019

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej 11 i 14 stycznia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty. Za rozwiązanie zadań z gwiazdką podnoszę końcową ocenę z ćwiczeń o dziesięć punktów procentowych.

Zadanie* 1. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że dla dowolnego odcinka otwartego I funkcja $f \upharpoonright I : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest na $\mathbb{R}$.

Zadanie* 2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie zbieżna do nieskończoności.

Zadanie* 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że istnieje ciąg a_n liczb rzeczywistych zbieżny do a taki, że jego wyrazy się nie powtarzają i $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Zadanie° 4. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ c, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W zależności od parametru c zbadaj, czy f jest ciągła.

Zadanie° 5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana warunkiem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2} + 3, & \text{jeśli } x < 0 \\ 2x + b, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W zależności od parametru b zbadaj, czy f jest ciągła.

Zadanie° 6. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Załóżmy, że $f(1) = 1$, $f(4) = 16$. Udowodnij, że dla pewnego x zachodzi równość $f(2x) = 4f(x)$.

Zadanie° 7. Załóżmy, że $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$. Udowodnij, że dla pewnego x , $f(x) = \sin x$.

Zadanie° 8. Udowodnij, że równanie $e^x = 3x^7 + 8x^3 + 2x + 5$ ma rozwiązanie.

Zadanie 9. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową. Udowodnij, że istnieje takie x , że $f(x) = x$.