

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

12 października 2018

Poniższe zadania należy deklарować na zajęciach z Analizy Matematycznej I. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Dla zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy $A+B$ jako $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \exists z \in B \ x = y + z\}$. Udowodnij, że $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Zadanie 2. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$ niech

$$\tilde{X} = \{\sup A \mid A \subset X\} \cup \{\inf A \mid A \subset X\}.$$

Innymi słowy jest to zbiór kresów podzbiorów X . Wskaż przykład zbioru $X \subset \mathbb{R}$, dla którego

$$\sup(\tilde{X} \setminus X) = \sup X$$

i ta wartość jest skończona.

Zadanie 3. Niech $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ będzie rodziną odcinków domkniętych (czyli po prostu zbiorem takich odcinków). Udowodnij, że przecięcie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ jest niepuste.

Zadanie 4. Wyznacz kresy zbioru $\{\sqrt[n]{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 5. Wyznacz kresy zbioru $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 6. Wyznacz kresy zbioru $\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$. Przez $\lfloor x \rfloor$ mamy na myśli największą liczbę naturalną nie większą od x .

Zadanie 7. Wyznacz kresy zbioru $\{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 8. Wyznacz kresy zbioru $\{\frac{nk}{n^2+k^2} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 9. Wyznacz kresy zbiorów $\{x+y \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge xy = 2\}$ oraz $\{xy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x+y = 2\}$.

Zadanie 10. Wyznacz kresy zbioru $\{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}_+\}$. Przez $\mathbb{R}_+$ mamy na myśli zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.