

Zadania ze Wstępu do Matematyki na 13 X

Bartosz Wcisło

6 października 2017

Część z wymienionych zadań rozwiązywaliśmy na ćwiczeniach. Część zaś będziemy rozwiązywać we wtorek.

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$2^n \geq n.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \geq -1$ i tego samego znaku zachodzi nierówność

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 2$

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \geq n! \geq 2^n.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Zadanie 6. Niech p_n będzie n -tą liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 12$ zachodzi nierówność:

$$p_n > 3n.$$

Dla $n = 12$ mamy $p_n = 37$.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli $a, b > 0$ i $ab = 1$, to $a + b \geq 2$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli $a, b > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Zadanie 9. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

Zadanie 10. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \dots, a_n$ jeśli $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, to $a_1 + \dots + a_n \geq n$.