

Zadania z Analizy Matematycznej I na 20 X

Bartosz Wcisło

13 października 2017

Pisemne rozwiązania poniższych zadań należy oddać do 20 X. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami. Przez $A + B$ mamy na myśli zbiór $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Udowodnij, że

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że $\sup\{\sqrt[n]{n!} \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

Zadanie 3. Niech $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Poniższego zadania nie trzeba rozwiązywać. Punkty za nie nie wliczają się do maksimum punktów możliwych do zdobycia. Być może z rozwiązywaniem zadań z gwiazdką będą się wiązały jakieś profity, ale umieszczam je przede wszystkim po to, żeby mogli się Państwo pozastanawiać.

Zadanie* 4. Niech $(a_n)_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnij, że istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$, która nie jest wyrazem tego ciągu.

Ten doniosły fakt pojawi się w którymś momencie na wykładzie z WDM-u, ale można udowodnić go już teraz korzystając z wiedzy z ćwiczeń.