

Kilka użytecznych faktów z Analizy Matematycznej I

19 grudnia 2018

Poniżej wypisuję garść faktów, które mogą się przydać przy rozwiązywaniu zadań (można z nich korzystać i się na nie powoływać).

Podstawowe twierdzenia

1. Nierówność średnich.
2. Twierdzenie o arytmetycznych własnościach granic.
3. Twierdzenie o trzech ciągach.
4. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
5. Twierdzenie Stoltza.
6. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.
7. Kryterium Cauchy’ego zbieżności ciągów.
8. Kryterium porównawcze zbieżności szeregów.
9. Kryterium kondensacyjne.
10. Kryterium Cauchy’ego zbieżności szeregów.
11. Kryterium D’Alemberta zbieżności szeregów.
12. Kryterium Raabego zbieżności szeregów.
13. Kryterium Dirichleta zbieżności szeregów.
14. Kryterium Abela zbieżności szeregów.
15. Twierdzenie Mertensa.
16. Równoważność zbieżności funkcji w sensie Cauchy’ego i Heinego.
17. Własność Darboux funkcji ciągłych.

Inne przydatne twierdzenia

1. Jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$, to $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$.
2. Ciąg $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ jest zbieżny.
3. Jeśli dla dowolnego ϵ istnieją ciągi b_n, c_n , takie że $b_n < a_n < c_n$ oraz $b_n \rightarrow a - \epsilon, c_n \rightarrow a + \epsilon$, to $a_n \rightarrow \epsilon$.
4. Jeśli szereg o wyrazach $|a_n|$ jest zbieżny, to szereg o wyrazach a_n też jest zbieżny.

Kilka podstawowych granic ciągów

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ dla dowolnego $a > 0, b > 1$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$ dla dowolnych $a > 1, b > 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.

Podstawowe fakty o zbieżności szeregów

1. Szereg $a_n = \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
2. Szereg $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$ jest rozbieżny.
3. Szereg $a_n = \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla dowolnego $s > 1$.
4. Szereg $a_n = \frac{1}{q^n}$ jest zbieżny dla dowolnego $q > 1$.

Kilka podstawowych granic funkcji

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^s} \rightarrow +\infty$ dla dowolnych $a > 1, s > 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^s(x)}{x^a} \rightarrow 0$ dla dowolnych $s, a > 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. (Pochodna e^x w zerze).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. (Pochodna $\ln$ w jedynce).
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. (Pochodna sinusa w zerze).
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Kilka podstawowych oszacowań

1. $e^x \geq 1 + x$. Równość zachodzi tylko dla $x = 0$.
2. $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$. Równość zachodzi tylko dla $x = 0$.
3. W szczególności $1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n-1}$.
4. $\ln(1+x) \leq x$. Równość zachodzi tylko dla $x = 0$.
5. $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ dla $x > -1$. Równość zachodzi tylko dla $x = 0$.
6. W szczególności $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

Ciągłość funkcji elementarnych

1. $\lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a)$ dla $a > 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = a$.